École Doctorale 2008

Symétrie en physique des particules

Exercice 1

On considère les générateurs du groupe de Lorentz dans la représentation vectorielle :

$$(J^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}{}_{\nu} - \eta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}{}_{\nu}.$$

Montrer que l'on a les relations de commutation suivantes :

$$\left[J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}\right] = \eta^{\beta\gamma}J^{\alpha\delta} - \eta^{\alpha\gamma}J^{\beta\delta} + \eta^{\delta\beta}J^{\gamma\alpha} - \eta^{\delta\alpha}J^{\gamma\beta}$$

Exercice 2

Montrer que l'on a

$$\Lambda = \exp\left(\varphi J^{01}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{sh}\varphi & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \exp\left(\theta J^{12}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Interpreter Λ et R.

Exercice 3

On définit $J_i = L_{jk}$ (i, j, k en permutation circulaire) et $K_i = L_{0i}$.

1 Montrer les relations de commutation (i, j, k en permutation circulaire)

$$[J_i, J_j] = J_k, \quad [J_i, K_j] = K_k, \quad [K_i, K_j] = -J_k.$$

2 Calculer les opérateurs de Casimir $Q_1 = \frac{1}{4}J_{\mu\nu}J^{\mu\nu}$, $Q_2 = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\mu\nu}J^{\rho\sigma}$.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$

On pose $N_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i),\ \bar{N}_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i)$, montrer

$$[N_i, N_j] = N_k, \quad \left[\bar{N}_i, \bar{N}_j\right] = \bar{N}_k, \quad \left[N_i, \bar{N}_j\right] = 0.$$

Les transformations ci-dessus sont valables dans le complexifié de $\mathfrak{so}(1,3)$, $\mathfrak{so}(1,3)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(1,3) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et montrent que $\mathfrak{so}(1,3)_{\mathbb{C}} \sim \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Si on reprend la forme réelle correspondante à l'algèbre de Lorentz, il faut se rappeler que N_i et $\bar{N}_i$ sont complexes conjugés l'un de l'autre et donc qu'en fait $\mathfrak{so}(1,3) \sim \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \overline{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}$. Dans la littérature on voit parfoit écrit que $\mathfrak{so}(1,3) \sim \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, ce qui n'est pas tout à fait exact.

$\boxed{\text{Exercice 5}}$

On introduit $\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\mu \bar{\sigma}_\mu), \bar{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \bar{\sigma}_\mu \sigma_\mu)$ et $M = \exp\left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right), \bar{M} = \exp\left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\right)$.

1 Calculer les relations de commutation $[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\alpha\beta}], [\bar{\sigma}_{\mu\nu}, \bar{\sigma}_{\alpha\beta}]$. Y-a-t-il un sens à calculer $[\sigma_{\mu\nu}, \bar{\sigma}_{\alpha\beta}]$?

2 Montrer que

$$M = \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\theta}.\vec{\sigma} - \frac{1}{2}\vec{\varphi}.\vec{\sigma}\right), \bar{M} = \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\theta}.\vec{\sigma} + \frac{1}{2}\vec{\varphi}.\vec{\sigma}\right).$$

3 En déduire que pour la représentation spécifiée par les matrices $\sigma_{\mu\nu}$ (resp. $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$) on a $N_i = -\frac{i}{2}\sigma_i, \bar{N}_i = 0$ (resp. $N_1 = 0, \bar{N}_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$).

$\boxed{\text{Exercice 6}}$

1 Montrer que la matrice complexe conjuguée de M, notée $M^\star$ est équivalente à $\bar{M}$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P telle que

$$\bar{M} = P M^\star P^{-1}.$$

2 En déduire que les spineurs gauchers sont complexes conjugués des spineurs droitiers.

On dit que les représentations $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$ de $\mathfrak{so}(1.3)$ sont isomorphes aux représentations $\underline{\mathbf{2}}$ (représentation complexe de dimension 2 de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$) et $\underline{\mathbf{2}}^\star$ (la complexe conjuguée de $\underline{\mathbf{2}}$)

$\boxed{\text{Exercice 7}}$

Montrer que si λ et ψ anticommutent alors $\psi_\alpha \lambda^\alpha = \lambda_\alpha \psi^\alpha$.

$\boxed{\text{Exercice 8}}$

Montrer que $\psi_\alpha \lambda^\alpha$ et $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$ sont des scalaires.

$\boxed{\text{Exercice 9}}$

1 Soit x^μ les composantes d'un quadrivecteur. On note $X = x^\mu \sigma_\mu$. Exprimer x^μ en fonction de X. Quel est le déterminant de X? Interpréter.

2 En déduire que si X se transforme sous l'action de $SL(2, \mathbb{C})$ en

$$X' = MXM^\dagger, \; M \in SL(2, \mathbb{C}),$$

on a $\det(X') = \det(X)$. En déduire qu'à une telle transformation correspond la transformation Λ, dont les éléments de matrices sont donnés par

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left(\bar{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^\dagger \right).$$

3 Montrer que la transformation $-M \in SL(2, \mathbb{C})$ conduit à la même transformation de Lorentz.

On dit que $SL(2, \mathbb{C})$ est le groupe de recouvrement universel de $SO_0(1,3)$ et on a $SO_0(1,3) = SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$. L'application ci-dessus, de $SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO_0(1,3)$ est un homorphisme $2:1$ $-$ à deux élements distincts de $SL(2, \mathbb{C})$ correspond un unique élement de $SO_0(1,3)$ $-$. Autrement dit, $-I$, (I étant l'identité), est dans le noyau de l'application précédente.

4 En déduire que

$$\psi^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$$

est un scalaire.

$\boxed{\text{Exercice 10}}$

Montrer que

$$\varepsilon^{\beta\alpha}\sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}\bar{\varepsilon}^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = \bar{\sigma}_{\mu}{}^{\dot{\beta}\beta}.$$

Exercice 11

Justifier les notations $\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$ pour un spineur de Majorana.
Indications : rechercher une matrice B telle que $\gamma_\mu^\star = -B\gamma_\mu B^{-1}$.

Exercice 12

Soit un champ Φ_M se transformant dans une représentation du groupe de Lorentz spécifiée par les matrices $J_{\mu\nu}$: $\Phi'_M(x') = \mathcal{R}_M{}^N\Phi_N(x)$, où $\mathcal{R} = \exp(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}J_{\mu\nu})$. On note $\delta\Phi_M(x) = \Phi'(x) - \Phi(x)$ (**attention on est au même point**).

1 Montrer que pour une transformation infinitésimale, on a

$$\delta\Phi_M(x) = \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\left((x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha)\delta_M{}^N + (J_{\alpha\beta})_M{}^N\right)\Phi_N(x).$$

Interpréter les différents termes.

2 Si on note $L_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu$ vérifier que les relations de commutation de $L_{\mu\nu}$ sont bien celles de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz, $\mathfrak{so}(1,3)$.

Exercice 13

Soient $L_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu$ et $P_\mu = \partial_\mu$ les générateurs de l'algèbre de Poincaré $\mathfrak{iso}(1,3)$, établir les relations de commutation.

Exercice 14

Soit $W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ l'opérateur de Pauli-Lubanski.

1 Calculer les commutateurs $[L_{\mu\nu}, W_\alpha]$ et $[P_\mu, W_\nu]$.

2 En déduire que $W^2 = W_\mu W^\mu$ est un opérateur de Casimir (*i.e.* commute avec tous les générateurs de l'algèbre de Poincaré).

Exercice 15

Montrer que le petit groupe pour les particules non-massives est en fait $ISO(2)$, c'est-à-dire le groupe des rotations-translations en deux dimensions.

Le petit groupe $ISO(2)$ étant non-compact, ses représentations unitaires sont de dimension infinie. Comme on préfère en général avoir des rep. de dimension finie, on représentera T_1, T_2 par zéro, et le petit groupe deviendra $SO(2)$. Il existe cependant des rep. unitaires pour lesquelles T_1, T_2 ne sont pas nuls; on parle alors de spin continu.

Exercice 16

Soit le lagrangien d'un électron couplé au champ électromagnétique :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi,$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu$ est le tenseur de Maxwell, A_μ le quadrivecteur potentiel électromagnétique, $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ la dérivée covariante de jauge, ψ le champ Dirac de l'électron et $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ son adjoint.

1 Montrer que les équations d'Euler-Lagrange conduisent à :

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \bar{\psi}\gamma^\nu\psi. \end{aligned}$$

2 Interpréter les différents termes.

Exercice 17

Soient $T_A, A = 1, \ldots, N^2-1$ les générateurs de $\mathfrak{su}(N)$. On donne les relations de commutation de $\mathfrak{su}(N)$

$$[T_A, T_B] = f_{AB}{}^C T_C.$$

Et on normalise les générateurs tel que

$$\mathrm{Tr}(T_A T_B) = -\frac{1}{2}\delta_{AB}, \quad \text{forme de Killing.}$$

1 Calculer les matrices $N \times N$ (représentation fondamentale) dans le cas où $N = 2, 3$. **Attention la normalisation dans le membre de droite des relations de commutation ci-dessus est différente de celle usuellement utilisée en physique. En effet, le membre de droite est réel et non pas purement imaginaire. Le signe moins de la**

forme de Killing provient du fait que les matrices T_A sont anti-hermitiennes; pour des matrices hermitiennes, on aurait un signe plus! Si on veut avoir une notation en accord avec la littérature physique, il faut faire la substitution suivante : $T^A \to T^A = -iT'^A$

2 Soit $A_\mu = A_\mu^A T_A$ un champ de jauge se transformant de la façon suivante sous une transformation de Jauge :

$$A'_\mu(x) = \mathcal{U} A_\mu(x) \mathcal{U}^\dagger + \mathcal{U} \partial_\mu \mathcal{U}^\dagger, \quad \text{avec} \ \ \mathcal{U} = \exp\left(\omega^A T_A\right).$$

Montrer que

$$\delta A_\mu^A(x) = A'_\mu(x) - A_\mu(x) = -\partial_\mu \omega^A + f_{BC}{}^A \omega^B A_\mu^C.$$

$\boxed{\text{Exercice 18}}$

Soit $F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$, avec $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu,\ A_\mu = A_\mu^A T_A$ la dérivée covariante de jauge (D_μ est une matrice $N \times N$)

1 Montrer que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

2 Montrer que si on pose $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^A T_A$, on a

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + f_{BC}{}^A A_\mu^B A_\nu^C.$$

$\boxed{\text{Exercice 19}}$

On considère la théorie de Grand-Unification basée sous le groupe de jauge $SU(5)$, c'est-à-dire que l'on plonge le groupe de jauge du modèle standard :

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \subset SU(5),$$

de la façon suivante [1] :

$$\mathfrak{su}(3) \subset \mathfrak{su}(5) = \begin{pmatrix} \mathfrak{su}(3) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{su}(5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{su}(2) \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

[1] En toute rigueur comme dans nos conventions, les matrices sont anti-hermitiennes, la matrice Y ci-dessus est plutôt i fois l'hypercharge.

On donne le contenu en quarks et leptons du modèle standard en fonction des nombres quantiques de $\mathfrak{su}(3)_c \oplus \mathfrak{su}(2)_L \oplus \mathfrak{u}(1)_Y$

$$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = (\underline{\mathbf{3}}, \underline{\mathbf{2}}, \tfrac{1}{6}), \qquad u_R = (\underline{\mathbf{3}}, \underline{\mathbf{1}}, \tfrac{2}{3}), \qquad d_R = (\underline{\mathbf{3}}, \underline{\mathbf{1}}, -\tfrac{1}{3}),$$
$$\ell_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_R \end{pmatrix} = (\underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{2}}, -\tfrac{1}{2}), \quad e_R = (\underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{1}}, -1).$$

1 Montrer que la représentation de dimension **5** de $\mathfrak{su}(5)$ se décompose dans le plongement $\mathfrak{su}(5) \supset \mathfrak{su}(3)_c \oplus \mathfrak{su}(2)_L \oplus \mathfrak{u}(1)_Y$ en

$$\underline{\mathbf{5}} = (\underline{\mathbf{3}}^\star,\ \mathbf{1}, \frac{1}{3}) \ \oplus \ (\underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{2}}, -\frac{1}{2}) = \ell_L \ \oplus \ d_R^c,$$

où d_L^c est le conjugué de d_L, donc un spineur gaucher.

2 Montrer que

.

$$\underline{\mathbf{5}}^\star \ \otimes \ \underline{\mathbf{5}}^\star = \underline{\mathbf{10}}^\star \ \oplus \ \underline{\mathbf{15}}^\star,$$

avec $\underline{\mathbf{10}}^\star$ un tenseur d'ordre deux antisymetrique et $\underline{\mathbf{15}}^\star$ un tenseur d'ordre 2 symetrique.

3 En déduire que dans le plongement $\mathfrak{su}(5) \supset \mathfrak{su}(3)_c \oplus \mathfrak{su}(2)_L \oplus \mathfrak{u}(1)_Y$, on a

$$\underline{\mathbf{10}}^\star = (\underline{\mathbf{3}}, \underline{\mathbf{2}}, \frac{1}{6}) \ \oplus \ (\underline{\mathbf{3}}^\star, \underline{\mathbf{1}}, -\frac{2}{3}) \ \oplus \ (\underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{1}}, 1) = q_L \ \oplus \ u_R^c \ \oplus \ e_R^c.$$