

Renormalizációs csoport és meta-elmélet

Polónyi János

Elméleti Fizika Laboratórium, Louis Pasteur Egyetem, Strasbourg, Franciaország

és

Atomfizika Tanszék, ELTE, Budapest

I. RÉSZ ÉS EGÉSZ

Egy összetett, komplikált rendszer módszeres megismerése céljából általában azt az egyszerű stratégiát alkalmazzuk, hogy először gondolatban a rendszert részekre bontjuk, a részekre vonatkozó törvényeket külön-külön feltérképezzük és végül a már ismert módon viselkedő részekből újból összeállítjuk a teljes rendszert.

A természet milyen hallgatólagosan feltételezett tulajdonságaira alapul ez a módszer? Azt hiszem, hogy két nyilvánvalónak tűnő, de valójában messzemenően nemtriviális problémát kell alaposabban megvizsgálnunk. Először, milyen mértékben tekinthető a teljes rendszer részeinek összegének? Másodsor, mennyiben alkalmazhatók az elkülönített részek vizsgálatából leszűrt tulajdonságok a rendszerbe beágyazott részek viselkedésének megértéséhez?

Az első probléma filozófiainak és az analitikus gondolkodás elkerülhetetlen velejárójának tűnik. A második kérdés látszik inkább a fizika témájához tartozónak. Az itt következő gondolatmenettel azt szeretném bemutatni, hogy valójában mindkét probléma tárgyalható a fizikában kifejlesztett renormalizációs csoport módszerével és egyik sem tűnik általános érvényűnek.

A gondolatmenet kifejtése közben több érdekes kérdést fogunk érinteni. A II. fejezettel azt szeretném érzékeltetni, hogy nincsenek állandók a fizikában, mindegyik "állandó" a megfigyelését jellemző hosszúság, idő és tömegskálák függvénye. A kvantumérelméletről szóló III. fejezetben a renormalizáció első kilelégítően részletes megjelenéséről lesz szó a részecskefizika területén. A nem-állandó "állandók" kérdéséhez tér vissza a IV. fejezet, ahol fénysebesség esetét próbáljuk megérteni. A renormalizációs csoport egyszerűbb, bevilágító alkalmazása a másodrendű fázisátmenetek elméletében a V. fejezetben lesz röviden elmesélve. A valóság komplexitását megközelítő egyesített elmélet renormalizációját érintő pár gondolat szerepel az VI. fejezetben. Végezetül a VII. fejezetben visszatérek a nyitó problémára.

Igyekeztem, hogy a szöveg nagyrésze érthető legyen érdeklődő középiskolások számára is. Ezért a képletek többé-kevésbé számúzva lettek, helyettük szavakkal próbálom kifejezni a fogalmakat és az összefüggéseket. A matematikai struktúra részletei néha nem fontosak a lényeg megértése szempontjából és elegendő, hogy az eredmények jól legyenek definiáltak. Mindezek ellenére nehéz helyzetbe kerülnek a kvantummechanika és a statisztikus fizika alapelemeit nem ismerő olvasók mert

A Fazekasban kezdődött...

a szövegben túl általános, megemészthetelen fogalmakkal fognak találkozni. Azt remélem, hogy ennek ellenére a fejezetek elejét átböngészve irányjelző szavakat őrizhetnek meg későbbi, részletes tanulmányaik idejére.

II. FIZIKAI ÁLLANDÓK

A fogalom, amely egy részrendszer leválasztását lehetővé teszi az a fizikai állandó. Egy rendszer kölcsönhatását a környezetével a rendszer viselkedését leíró egyenletek tartalmazzák és ezekben pedig bizonyos állandók, például tömeg vagy a töltés jellemzik a kölcsönhatást. A részrendszer leválasztását az teszi problémátikusává, hogy ezek a fizikai állandók valójában függvények, azaz nincsenek szigorúan vett fizikai állandók. Ez az eléggé provokatív állítás pontosabban a következőt jelenti. Köztudott, hogy a fizika törvényei más formát öltenek amennyiben más hosszúság, idő vagy tömeg nagyságrendjében keressük őket. Ezt úgy lehet egyszerűbben megfogalmazni, hogy a fizika törvényei függenek a megfigyelést, illetve a kísérletet elkerülhetetlenül jellemző skálától. Előfordulhat, hogy ez a függés gyenge és a szokásos pontosságú mérésekkel nem látható. Ilyen esetekből származik az a benyomásunk, hogy léteznek fizikai állandók. Az alábbi két példán szeretném megmutatni, hogy egy állandónak vélt mennyiség hogyan válhat a megfigyelés skálájának függvényévé a környezettel való kölcsönhatás következtében.

A. Tömeg

Az a megfontolás, amely később a renormalizációs csoport módszerében lett általánosítva, először a 19. század folyamán tűnt fel a hidrodinamikában. Tekintsünk egy folyadékba mártott m tömegű testet, mely egyenletes haladó mozgást végez \mathbf{v} sebességgel. Mekkora a folyadékban mozgó test tömege? A probléma abból áll, hogy jóllehet a környezetétől elkülönített test tömegét ismerjük, a folyadékban mozgó test a folyadék egy részét is magával viszi és így módon a mozgó anyag tömege megváltozik. Más szóval a környezettel való kölcsönhatás módosítja a test definícióját. A részecske- és a statisztikus fizikában a környezetével kölcsönható elemi részecskét kvázi-részecskének hívják. Ennek alapján a folyadékba mártott testet kvázi-testnek nevezhetjük, melynek a tömege környezettel való kapcsolattól függ.

Ezen a ponton elkerülhetelenné válik a tömeg definíciójának pontos bevezetése. Ez nem egyértelmű lépés, azonban a mechanika nagy részével összhangban maradunk ha egy, az esetleges többi testtől elkülönített, csupán a folyadékban mozgó kvázi-test $m(\mathbf{v})$ tömegét oly módon definiáljuk, hogy a rendszer teljes energiája egy \mathbf{v} sebességgel mozgó, $m(\mathbf{v})$ tömegű test

$$E_{\text{kin}} = \frac{m(\mathbf{v})}{2} \mathbf{v}^2 \quad (1)$$

mozgási energiájával egyezzen meg. Tehát meg kell mérni a folyadék és test együttes rendszerének

$E_{\text{tot}}(\mathbf{v})$ teljes energiáját és a kvázi-test effektív tömegét a

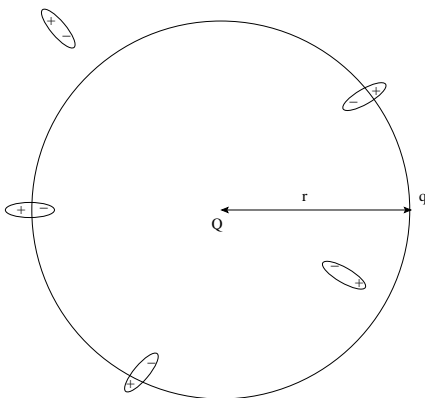
$$m(\mathbf{v}) = \frac{2E_{\text{tot}}(\mathbf{v})}{\mathbf{v}^2} \quad (2)$$

kifejezéssel vezetjük be. Ha a testtel együtt mozgó folyadék pozitív kinetikus energiája mellett a test-folyadék kölcsönhatás energiája elhanyagolhatóan kicsinek feltételezhető, akkor az $m(\mathbf{v}) \geq m$ egyenlőtlenség adódik, ahol az egyenlőség vagy a kölcsönhatásmentes esetben, vagy pedig a $\mathbf{v} \rightarrow 0$ határesetben állhat fenn.

Azt is fontos végiggondolni, hogy bármilyen természetes közegben, például a levegőben mozgó testekre is érvényes ez a gondolatmenet. Egy nagyobb tömegű és ezért sűrűbb atmoszférájú égitesten elvégzett mozgás tanulmányozása során talált tömeg sebességfüggése nyilvánvaló következménye a szokásos Newton egyenletnek.

B. Elektromos töltés

Az elektromos töltés renormalizációját, a megfigyelési skálától való függését megfigyelhetjük mind a klasszikus, mind pedig a kvantumfizikában.



1. ábra. A $Q > 0$ pontszerű töltés gömbszimmetrikus polarizácót kelt maga körül. Az r távolságban fellépő elektrosztatikus potenciál $U(r) = Q(r)/r$, ahol $Q(r)$ a Q töltés körül húzott r sugarú gömb belsejébe eső összes töltés. A teljes egészükben a gömb belsejébe vagy a külsejébe eső dipólusok nem adnak járulékot $Q(r)$ -hez. Azonban a gömb felszíne által átmetszett dipólusoknak csak egy részét kell figyelembe venni, melyek töltése ellentétes előjelű mint Q .

Kezdjük a klasszikus esettel, egy homogén, elektromosan polarizálható anyagba helyezett Q töltéssel és határozzuk meg a töltés megváltozását a polarizáció következtében. Ezt úgy tehetjük meg a legegyszerűbben, hogy egy q ($|q| \ll |Q|$) próbatöltést helyezünk r távolságban az eredeti töltéstől és megmérjük a rendszer $E_C(r)$ Coulomb energiáját, lásd az 1. ábrát. Köztudott, hogy gömbszimmetrikus töltéseloszlás esetén a szintén gömbszimmetrikus elektrosztatikus potenciál $U(r)$

nem változik, ha az r sugarú gömbben található töltéseket az origóban koncentráljuk. Tehát az r távolságból látszó töltést $Q(r)$ -el jelölve az

$$E_C(r) = U(r)q = \frac{Q(r)q}{r} \quad (3)$$

összefüggést kapjuk ami az r távolságból látható

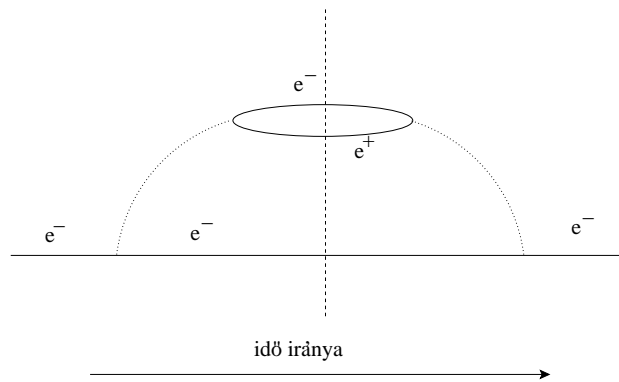
$$Q(r) = \frac{E_C(r)r}{q} = U(r)r \quad (4)$$

effektív töltést eredményez.

A gömbszimmetrikus módon polarizált dipólusokban a Q -val ellenkező töltésű végek mutatnak a Q töltés felé. Tehát az r sugarú gömb felülete úgy hasítja ketté az átmetszett atomi dipólusokat, hogy a gömbbe zárt $Q(r)$ töltésben a Q -val ellentétes töltések lesznek többségben,

$$Q(r) < Q, \quad (5)$$

azaz árnyékolás lép fel. Mivel a nem zérus töltés Coulomb energiája infravörös, azaz nagy távolsagokból fakadó divergenciát tartalmaz, a leárnyékolásnak teljesnek kell lenni, $Q(\infty) = 0$, illetve $U(r) = o(r^{-1})$.



2. ábra. A e^-e^+ párkeltés egy e^- elektron propagálása során. A folytonos vonal az e^- elektron vagy pedig az e^+ pozitron propagálását jelzi, a pontozott pedig a fotonét. A szaggatott vonalhoz tartozó időpontban két elektronunk és egy pozitronunk van, ami egy elektronnak és egy vákuumpolarizációs dipólusnak felel meg.

A kvantumelektrodinamikai analógja ennek a klasszikus leárnyékolásnak a vákuumpolarizációra vezethető vissza. A speciális relativitáselmélet szerint energiát anyagba lehet átalakítani és fordítva. Ez a kvantummechanikában azt jelenti, hogy energiával elemi részecskéket kelthetünk, illetve részecskék eltűnése energiát szabadít fel. A töltésmegmaradás alapján energia befektetésével töltések, mondjuk e^- elektronok csak semleges, e^-e^+ elektron-pozitron párban keltődhetnek. Ha

egy folyamatot nem tilt meg valamelyik megmaradási tétel, akkor az meg is valósul a kvantummechanikában. Tehát egy elektron a propagálása során folyamatosan kibocsájt és elnyel elektron-positron párokat még akkor is, ha mindez más töltések távollétében, a kvantumelektrodinamika alapállapotában, azaz vákuumban történik. A legegyszerűbb folyamat, egy e^-e^+ pár keltése és eltüntetése látható a 2. ábrán. Az energia-impulzus megmaradás miatt a e^-e^+ párokban található részecskék virtuálisak, azaz nem választhatók le, azonban állandóan körülveszik az eredeti töltést. Az klasszikus, polarizálható közeggel való analógiában a klasszikus dipólusok szerepét a vákuumpolarizáció e^-e^+ párijai játsszák és a (3)-(4) egyenletekhez hasonlóan renormalizálják, távolságfüggővé teszik a vákuumba helyezett töltést. A végszó az, hogy a töltés nagysága függ attól, hogy milyen módon figyeljük meg.

III. RENORMALIZÁCIÓ A KVANTUMTÉRELMÉLETEKBEN

A fizikai paraméterek skálafüggését a kvantumtérelmélet keretein belül lehet módszeresen tárgyalni. Ezt a megközelítést próbálok kvalitatív szinten bevezetni ebben a fejezetben. A történelmi hűség kedvéért a kvantumtérelméleteket jellemző ultraibolya divergenciákon keresztül történik majd meg¹. Ily módon jobban megérthetjük a részecskefizika egyes alapvető kérdéseit, azonban a renormalizáció tágabb értelemben vett célja független a divergenciák által okozott problémák kiküszöbölésétől. Ehhez az általánosabb kérdéshez csak a VI. fejezetben térünk majd vissza.

A. Ultraibolya divergenciák a kvantumelméletben

A kvantummechanikában az $f(q, p)$ klasszikus mennyiségek, a koordináta q és az impulzus p tetszőleges függvényei operátoroknak felelnek meg, $q \rightarrow \hat{q}$, $p \rightarrow \hat{p}$, $f(q, p) \rightarrow f(\hat{q}, \hat{p})$. Az egyik alapvető összefüggés, a Heisenberg felcserélési reláció azt mondja ki, hogy a koordináta és impulzus operátorok nem cserélhetők fel,

$$\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar\mathbb{1}, \quad (6)$$

ahol \hbar a Planck-állandó, a kvantumeffektusok fontosságának a mértéke. A Heisenberg felcserélési reláció egyik következménye az, hogy egy részecske koordinátájának meghatározása az impulzusára vonatkozó minden információ elvesztéséhez vezet. A részletes számítások azt mutatják, hogy egy m tömegű részecskén Δt időközökben végrehajtott koordinátamérés a sebességet átlagosan $\sqrt{\hbar/m\Delta t}$ mértékben változtatja meg. Tehát kvantummechanikában a részecskék nem folytonosan deriválható trajektóriákon haladnak, hanem legjobb esetben is csak fraktál pályákról beszélhetünk, melyek mentén az idő szerinti deriválás divergenciákhoz vezet². Mivel a sebesség, illetve az impulzus fontos szerepet játszik a dinamikában, a kvantummechanikában $\sqrt{\hbar}$ hatványaival arányos divergenciák jelennek meg, ha a Hamilton operátorban, az energiát reprezentáló operátorban a koordináta és az impulzus operátor kvadratikusnál magasabb rendű szorzata fordul elő³.

A kvantumtérelméletekben a divergenciák még erősebbnek bizonyulnak. A térmennyiség, például az elektromágneses mező Δt időközökben végrehajtott mérése következtében $\mathcal{O}(\Delta t^{-2})$ jellegű ugrásokat szenved és a megfigyelhető mennyiségek kifejezései matematikailag értelmezhetetlen ultraibolya, azaz $\Delta x = c\Delta t$ (c a fénysebesség) rövid távolságokról eredő divergenciákat tartalmaznak.

B. Regularizáció

Ez a probléma hosszú időn át gátolta a kvantumtérelméletek fejlődését. A jelenlegi ismereteink alapján a következő módon kerülhetjük el ezt a csapdát. A divergenciák akkor jelentkeznek, amikor az adott kölcsönhatás, mondjuk az elektromágnesesség leírását tetszőlegesen kis távolságra vagy időre, azaz tetszőlegesen nagy impulzusra és energiára alkalmazzuk. Azonban a fizika pragmatikus tudomány, csak azt kell komolyan venni, ami ténylegesen megfigyelhető, valóságos folyamat. Miért erőltetünk bármely elméletet tetszőlegesen kis távolságra vagy időkre? Emlékezzünk arra, hogy nagy áttörések következtek be a fizikában amikor sikerült az addiginél kisebb távolságon új kölcsönhatást, illetve részecskéket felfedezni! Ne feledjük el, hogy az eddigi mérések nem képesek a kb. $\ell_{\min} = 10^{-15}$ cm-nél rövidebb távolságban és $t_{\min} = \ell_{\min}/c$ -nél rövidebb időintervallumban történő folyamatokat felbontani!

Sokkal természetesebbnek tűnik a mérésekben elkerülhetetlenül megjelenő maximális felbontást komolyan venni és ennek következtében minden fizikai elméletet csupán egy kicsiny, de véges minimális távolságig figyelembe venni. Természetesen ez a minimális távolság sokkal kisebb kell, hogy legyen mint az összes megfigyelés felbontása. Ezért minden elmülethez bevezetünk egy ℓ_{\min} minimális távolságot, levágást és ennél rövidebb távolságokon semmilyen folyamatot sem engedünk meg. Ezt a lépést regularizációnak nevezzük mert eltávolítja a divergenciákat a megfigyelhető mennyiségek kifejezéseiből és azokat matematikailag értelmezhetővé teszi. A regulátor, a minimális távolság létezése tudásunk részlegességét tükrözi, hogy a természet minden számunkra hozzáférhető információja véges tér-idő felbontáshoz tartozik.

A helyzetet úgy foglalhatjuk össze, hogy a kvantumelmélet által leírható kölcsönhatások összeférhetetlenek a tér-idő folytonos struktúrájával. Minden eddig végrehajtott kísérletben a kvantummechanika jóslataival megegyező eredményt találtunk. így nincs okunk a kvantumelmélet alkalmazhatóságában kételkedni. A jelenlegi ismereteink alapján a tér-idő struktúra folytonosságát vagyunk kénytelenek feláldozni ahhoz, hogy a kvantummechanikát fenntarthassuk. Ezzel a matematika alapfogalmai, mint a határérték vagy a kontinuum válnak szigorúan véve szükségtelenné a fizikában. A szerepük arra szorítkozik, hogy a levágáshoz képest sokkal hosszabb távolságokon renormalizált (lásd III C. fejezetet) összefüggéseket állíthassunk elő a minimális távolság explicit használata nélkül.

C. Renormalizálás

A regularizáció ugyan elkerülhetetlen lépésnek tűnik, de nem jelentheti az ultraibolya divergenciák által jelzett probléma megoldását hiszen csupán annyi történt, hogy a divergenciákat lecseréltük egy új szabad paraméterre, a levágásra, amely minden megfigyelhető mennyiség kifejezésében előfordul. Hogyan válasszuk meg az értékét?

Erre a kérdésre ad választ a renormalizáció a matematikai határérték fogalmának alkalmazásával¹. Tekinsük példaképp a kvantumelektrodinamika atomfizikai alkalmazását. Ebben az elméletben három fizikai paraméter szerepel, az elemi töltés e_B , az elektron tömeg m_{eB} és a proton tömeg m_{pB} . Az elméleteket meghatározó paraméterek általában két csoportra oszthatók, tömeg paraméterekre, mint m_{eB} és m_{pB} , illetve csatolási állandókra, ez esteben e_B , amelyek a kölcsönhatás erősségét határozzák meg. A kvantumelektrodinamika paramétereit három alkalmasan választott mérési eredmény, \mathcal{M}_a , $a = 1, 2, 3$ segítségével rögzíthetjük. Vegyük például a következő mérési eredményeket:

1. $a = 1$: az elektron-elektron rugalmas szórás hatáskeresztmetszete egy adott kinematikai pontban,
2. $a = 2$: az proton-elektron rugalmas szórás hatáskeresztmetszete szintén egy adott kinematikai pontban és
3. $a = 3$: a hidrogén atom első gerjesztési energiája.

Ezután számoljuk is ki mindhárom mennyiséget. Az eredményt $F_a(e_B, m_{eB}, m_{pB}, \ell_{\min})$ -el jelöljük. Végezetül oldjuk meg az

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= F_1(e_B, m_{eB}, m_{pB}, \ell_{\min}), \\ \mathcal{M}_2 &= F_2(e_B, m_{eB}, m_{pB}, \ell_{\min}), \\ \mathcal{M}_3 &= F_3(e_B, m_{eB}, m_{pB}, \ell_{\min}),\end{aligned}\tag{7}$$

egyenletrendszert az e_B , m_{eB} , és m_{pB} paraméterekre. A végeredmény a levágásfüggő $e_B(\ell_{\min})$, $m_{eB}(\ell_{\min})$ és $m_{pB}(\ell_{\min})$ függvény.

Mielőtt továbbmennénk, az e , m_e és m_p paraméterekben megjelenő B index bevezetésének szükségességét kell tisztáznunk. Arról az első pillanatban rettentően zavarónak tűnő körülményről van szó, hogy az elmélet e_B , m_{eB} , és m_{pB} paramétereit nem egyeznek meg a valódi, fizikai töltés és tömegek értékeivel. Ezt úgy lehet belátni, hogy megkíséreljük a valódi, fizikai töltés és tömeg számolását. A II. fejezetben elmondottak alapján ez eléggé komplikált eljárás mert ezek a mennyiségek nem állandók, hanem az őket definiáló körülmények skálaparamétereitől függő függvények. Természetesen ezek a kifejezések az elmélet felépítésére használt e_B , m_{eB} , és m_{pB} paramétereken kívül a levágást is tartalmazzák. Az elmélet formális paramétereinek és az azoknak egy adott definíciójának megfelelő értékek megkülönböztetésére a paramétereket "csupasz" (angolul *bare*) és a valódi, fizikai mennyiségeket renormalizált vagy "felöltöztetett" mennyiségeknek

hívják. Ezt az elnevezést az sugallja, hogy kölcsönhatás híján, $e = 0$ esetén a fizikai állandók valóban állandók, függetlenek a környezettől. A csupasz és a fizikai értékek közti különbség a kölcsönhatás következménye, amit úgy is el lehet képzelni, mintha a valódi részecskék az elemi, "csupasz" részecskékből kiindulva a kölcsönhatás által lennének "felöltöztetve" a IIB. fejezetben felvázolt vákuumpolarizációhoz hasonló módon.

Ezután már könnyebben megérthetjük az (e_B, m_{eB}, m_{pB}) háromdimenziós paramétertérben fekvő és a levágással parametrizált $(e_B(\ell_{\min}), m_{eB}(\ell_{\min}), m_{pB}(\ell_{\min}))$ un. renormalizált trajektória jelentését: minden egyes pontja olyan kvantumelektrodinamikának felel meg, amely reprodukálja azon három mérés eredményét az adott levágás esetén, melyek az elmélet rögzítését szolgálták.

De mit történik a többi megfigyelhető mennyiséggel, ha azokat is kiszámoljuk a levágás különböző értékeinél? Azok általában levágásfüggők. Ha ez a függés olyan, hogy a levágás eltávolításakor, az $\ell_{\text{ell}} \rightarrow 0$ határesetben minden megfigyelhető mennyiség konvergál, akkor az elméletet renormalizálhatónak hívjuk. Ellenkező esetben az elmélet nem renormalizálható.

A renormalizálható elméletek különlegessége az, hogy ugyan szükségünk van a levágás bevezetésére az ultraibolya divergenciák kiküszöbölésére, azonban létezik egy olyan határérték az elmélet paramétereire számára, melyben a levágás eltávolítható anélkül, hogy eközben az elmélet fizikai tartalma megváltozna. Mivel az elmélet paramétereinek nincs fizikai jelentése ez az eljárás megnyugtatóan eltávolítja a megfigyelhető mennyiségek kifejezéseiben mindenütt megjelenő, zavaró levágást. A renormalizálható elméletek olyan kölcsönhatásokat tartalmaznak, melynek jelenlétében a tér-idő folytonossága tetszőleges finom felbontás esetén is fenntartható a paraméterek alkalmas megválasztásával.

D. Landa skála és renormalizálható elméletek

A kvantumelektrodinamika esetére visszatérve meg kell említeni, hogy ez az elmélet nem renormalizálható. Először L. D. Landau vonta le ezt a következtetést, miután a (7) típusú egyenletrendszert a csatolási állandóban sorfejtve tanulmányozta. Azt találta, hogy ez az egyenletrendszer, amely nemlineáris a keresett paraméterekben nem rendelkezik megoldással, ha a levágás bizonyos küszöbérték alá esik, $\ell_{\min} < \ell_L$. Az ℓ_L skálát felfedezőjéről Landau skálának nevezték el. Történelmi kiegészítésképpen jegyzem meg, hogy ez az eredmény olyan erős benyomást keltett annak idején, hogy a Landau iskola ezután több évtizedre felhagyott a kvantumtérelméletek alkalmazásával. A csupasz csatolási állandó, e_B divergál amikor a levágás a Landau skálát megközelíti. Ezt az eredményt úgy interpretálhatjuk, hogy rendkívül erős csupasz kölcsönhatásra van szükség, hogy a Landa skála közelében fenntartsuk az elektromágneses kölcsönhatást. Minél gyengébbnek tételezzük fel az elektromágneses kölcsönhatást a kísérletileg elérhető tartományban, a Landau skála annál rövidebbé válik. Más szóval, az elektromágneses kölcsönhatás és a kvantummechanika csupán $\ell \gg \ell_L$ távolságokon fér össze és az egyetlen lehetőség a pontszerű elektronok, protonok és fotonok egyidejű létezésére az, hogy ne hassanak kölcsön, mert ekkor $\ell_L = 0$.

Az utóbbi évtizedekben lehetőség nyílt a kvantumelektrodinamika numerikus ta-

nulmányozására⁴ annak eldöntésére, hogy ez a negatív eredmény az alkalmazott közelítésből, a csatolási állandóban való kifejtésből adódott, vagy pedig igaz marad akkor is, ha a csupasz csatolási állandó divergál. Úgy tűnik, hogy ugyan az elméletnek sikerül stabilizálni magát és a csupasz csatolási állandó véges marad, de a (7) egyenletrendszer nemlinearitása mégis lehetetlenné teszi a megoldás létezését egy bizonyos Landau távolság skála alatt.

Szerencsére ez az egész csupán egy matematikai problémává válik és nem érinti a kvantum-elektrodinamika reális problémákra való alkalmazását mert az elektromágneses kölcsönhatás olyan gyenge, hogy a Landau skála sok nagyságrenddel rövidebb, mint az a távolságskála, ahol a Sztandard Modell szerint az elektromágnesesség összeolvad a gyenge kölcsönhatással.

Ha a kvantumelektrodinamika nem renormalizálható, akkor létezik-e egyáltalán renormalizálható elmélet? A jelenlegi ismereteink alapján az a válasz tűnik valószínűnek, hogy csak az ún. aszimptotikusan szabad elméletek renormalizálhatók, amelyekben a csupasz csatolási állandó nullához tart miközben a levágást eltávolítjuk. Egy elmélet-családot ismerünk amelyik kielégíti ki ezt a feltételt, az ún. Yang-Mills mértékelméletek osztályát. A legalaposabban tanulmányozott példája a kvantumszíndinamika, amely az erős kölcsönhatást írja le. Ez a mag- és részecskefizikában előforduló legerősebb kölcsönhatás az atommag protonjait és neutronjait alkotó kvarkok között. Azt gondoljuk, hogy az összes nem aszimptotikusan szabad elmélet triviális, azaz csupán a kölcsönhatás teljes kikapcsolásával lehet az $\ell_{\min} \rightarrow 0$ határesetet végrehajtani.

E. Nem-renormalizálható elméletek fontossága

Milyen elmélet után érdeklődünk inkább, a renormalizálhatók vagy a nemrenormalizálhatók iránt? A renormalizálható elméletek olyan kölcsönhatást írnak le, amelyet tetszőlegesen kis távolságokon is fenntarthatunk a kvantumelmélet keretei között. Ez egy fontos egyszerűsítési szempont, mert lehetővé teszi, hogy a kölcsönhatásokat egymástól függetlenül vizsgálhassuk. Tehát a renormalizálható elméletek a fizika alaptörvényeinek feltérképezésében fontos szerepet játszanak. Ennek megfelelően a részecskefizika történetében egészen az utóbbi évtizedig a renormalizálható elméletek megalkotásában jelölődött ki a fejlődés iránya.

Azonban nem szabad elfelejtenünk arról, hogy a renormalizálható elméletek túlságosan leegyszerűsítik a valóságot. Amikor azt jelentjük ki, hogy egy bizonyos renormalizálható elmélettel modellezzük a fizikát, hallgatólagosan azt is leszögezzük, hogy az ebben az elméletben található kölcsönhatáson kívül nincs más kölcsönhatás a természetben. Mivel a fizika nagy áttörései sokszor a mikrovilág új, addig ismeretlen résztvevőiről és kölcsönhatásairól adnak hírt, a renormalizálható elméletek csupán az aktuális ismeretek ideiglenes összegzésére szolgálhatnak.

Például a részecskefizika eddigi eredményeit kielégítő módon öleli fel az ún. Sztandard Modell. "Szerencsére" ez a modell tartalmaz több nem aszimptotikusan szabad kölcsönhatást és így nem renormalizálható. Ez az első pillanatban hátrányosnak tűnő tulajdonsága az, amely azt a reményt tartja fenn bennünk, hogy mihelyest a Sztandard Modell nem renormalizálható kölcsönhatásainak vizsgálataiból nyert, megközelítőlegesen 700-szoros protontömeg energiaskálán tanulmányozhatjuk

az elemi részecskék viselkedését új, a Sztandard Modellben nem szereplő fizikai jelenségekre kell bukkannunk.

A nem-renormalizálható elméleteket effektív elméletnek is szokták hívni. Az elnevezés arra utal, hogy ezekben az elméletekben előforduló kölcsönhatásoknak nem létezik kvantummechanikai leírása tetszőleges kis távolságon, ezek az elméletek csupán esetleg még nem ismert mikroszkópikus szabadságfokok hosszabb távolságon megnyilvánuló effektusait tartalmazzák.

F. Kvantum anomália

Az ember azt gondolhatná, hogy a renormalizálható elméletekben a levágás valóban, egyszer és mindenkorra eltávolítható. De ez nem így történik. Tekintsük példaképpen az erős kölcsönhatást leíró kvantumszindinamikát abban az egyszerűsített változatában, amely még mindig elég jól, kb. 20% pontossággal írja le protonok és neutronok dinamikáját, de csupán egyetlen dimenziótlan paramétert, a g_B csatolási állandót tartalmaz (a többi paraméter, a kvarktömegek zérusnak lettek választva). Ez az elmélet a következő váratlan probléma elé állít minket: hogyan kaphatjuk meg az erős kölcsönhatás alapvető dimeziós skáláját, a proton tömeg értéket olyan elméletből, amely csak dimenziótlan paramétert tartalmaz⁵?

A protontömeg meghatározása lehetetlen dimenziós paraméter nélkül. De ne felejtkezzünk meg az ultraibolya divergenciákról, melyek ebben az elméletben is elszaporodnak és itt is be kell vezetnünk egy ℓ_{\min} levágást amely dimenziós mennyiség. A kvantumszindinamika részletes tanulmányozása azt a meglepő eredményt szolgáltatja, hogy a megoldásban megjelenik a levágás és a csupasz csatolási állandó $f(g_B)$ függvényének szorzata, az $\ell_{\min} f(g_B(\ell_{\min}))$ kifejezés véges értékhez tart az $\ell_{\min} \rightarrow 0$ határesetben. Ezt az érdekes jelenéget dimenziós transzmutációnak hívják, mert azt jelzi, hogy annak ellenére, hogy végrehajtottuk a $\ell_{\min} \rightarrow 0$ határesetet, a levágás maradandó, véges nyomot hagyott az elméletben.

Fontos ezen a ponton megjegyezni, hogy az egyetlen hosszúság dimenziójú levágás elegendő bármely dimenzionális mennyiség előállítására. Ez azért van így, mert csak három független dimenziót ismer a fizika, a hosszúság, idő és a tömeg egységeit, és a $\hbar = c = 1$ egység választás, amely természetesnek tűnik a részecskefizikában egyetlen dimenzió szabad megválasztását engedi csak meg.

Úgy foglалhatjuk össze a tanulságot, hogy a klasszikus szindinamika invariáns egy közös skála ($\hbar = c = 1$) tetszőleges megváltoztatásával szemben. Ezt a skálainvarianciát a levágás bevezetésével megsértjük, de naivan azt várjuk, hogy a levágás skálájától távol (azaz véges skálán miközben a $\ell_{\min} \rightarrow 0$ határesetet végrehajtottuk) a kvantumelmélet visszanyeri skálainvarianciáját. A dimenziós transzmutáció azt tanúsítja, hogy ez nem így történik. Megjelenik a kvantum anomália, annak a jelensége, hogy a klasszikus fizika egyes, természetesnek és általánosnak tűnő összefüggéseit visszavonhatatlanul megváltoztatják a kvantumfluktációk⁶.

A klasszikus fizika dimenzióanalíziséből nyert eredmények megváltozása a renormalizált elméletben, ahol a levágást már formálisan eltávolítottuk érthetetlennek tűnik és ez a furcsa vonás

magyarázza az "anomália" elnevezést. A klasszikus dimenzióanalízist úgy lehet összhangba hozni a kvantumelmélet eredményeivel, hogy az elméletben előforduló mennyiségek klasszikus dimenzióját megfelelő módon megváltoztatjuk. Az így kapott "anomális" dimenziókkal tudjuk a levágás által okozott skálainvariancia sérülést valamivel elfogadhatóbb módon leírni.

Egy, talán többlet mondó magyarázat a kvantum anomáliára a következő. A szokásos analitikus módszer az elméletek tanulmányozására a perturbációs számítás, ahol a kölcsönhatásmentes elmélet körül fejtünk sorba a csatolási állandóban. Az így nyert kifejezések a nemperturbált állapotokra való összegzéseket tartalmazzak. A szabad részecske állapotait az impulzus szerint lehet osztályozni, tehát ez az összegzés valójában az impulzusra vett integrál. Ahhoz, hogy a naiv, klasszikus skálainvarianciát visszanyerjük, az integrálás előtt kellene végrehajtanunk az $\ell_{\min} \rightarrow 0$ határátmenetet az integrandusban. A határátmenet és az integrálás felcserélhető, ha az integrál egyenletesen és abszolút módon konvergál. Egyes esetekben a második feltétel sérül. Ez a finom matematikai különbség vezet arra, hogy az integrálás után már nem hanyagolható el a levágás jelenléte, bármely szélsőségesen kis értéket vesz is fel. Mivel a perturbációs számításban a közbenső állapotokra való összegzés a kvantumfluktációk hatását veszi figyelembe úgy is fogalmazhatunk, hogy a kvantumfluktációk tetszőleges kis távolságokon is lényeges szerepet játszanak és detektálják a levágás jelenlétét akkor is, ha az a megfigyelési skálától nagyon távol helyezkedik el.

G. Futó csatolási állandó

A II. fejezetben azt próbáltam érzékeltetni, hogy minden fizikai "állandó" valójában a megfigyelési skála függvénye. Egy renormalizálható elmélet csupasz paramétere is függvény, csak éppen a levágásé. Értelmezhető-e a csupasz paraméter levágásfüggése, mint egy fizikai mennyiség skálafüggése?

A II. fejezetben követett heurisztikus eljárásban egy megfigyelhető mennyiséget úgy állítottunk elő, hogy a komplikált kölcsönhatást egy egyszerű kifejezésben egy effektív paraméter alkalmasan megválasztott értékével szerepeltettük. Tegyük fel, hogy sikerült egy ℓ hosszúságskálához tartozó \mathcal{M} fizikai mennyiséget pontosan kiszámolnunk a kvantumelektrodinamikában és eredményül a

$$\mathcal{M} = \ell^D F \left(\frac{\ell}{\ell_{\min}}, e_B, m_{eB}\ell, m_{pB}\ell \right) \quad (8)$$

kifejezést kaptuk, ahol az ℓ^D faktor adja a fizikai mennyiség dimenzióját ($c = \hbar = 1$). Az F dimenziótlan függvény meglehetősen komplikált mert az elektromágneses kölcsönhatást teljes részletességgel tartalmazza. Az intuíciónkat egy egyszerűbb, mondjuk a perturbációs számítás vezető rendjében kapott

$$\mathcal{M} \approx \ell^D F_{\text{pert}} \left(\frac{\ell}{\ell_{\min}}, e_B, m_{eB}\ell, m_{pB}\ell \right) \quad (9)$$

eredmény fogja irányítani. A IIB. fejezetben követett gondolatmenetben $\ell^{-1}F$ az egzakt, $\ell^{-1}F_{\text{pert}}$ pedig a Coulomb potenciállal számolt és a polarizációt elhanyagoló egyszerű kifejezés az elektro-

sztatikus energiára. Az $e(\ell)$ futó elektromágneses töltést az

$$\mathcal{M} = \ell^D F_{\text{pert}} \left(\frac{\ell}{\ell_{\min}}, e(\ell), m_{eB}\ell, m_{pB}\ell \right) \quad (10)$$

egyenlettel definiáljuk.

A gondolatmenet folytatása a kölcsönhatás által bevezetett "öltöztetés" eredetének pontosabb ismeretét kívánja. Ebben a problémában a lényeges dinamikai folyamatok két hosszúságskála, ℓ és ℓ_{\min} között játszódnak le: Az ℓ_{\min} minimális hossz alatt semmi sem történik, az ℓ megfigyelési skálánál jóval hosszabb távolságon lejátszódó folyamatok pedig elhanyagolhatók lokális kölcsönhatás esetén. A kölcsönhatás fontosságának a mértéke az F függvény első argumentumának az egységtől való eltérése, $\ell/\ell_{\min} - 1$. A perturbációszámítás magasabb rendű járulékaik egyre kisebb skálatartományból származnak és végül elhanyagolhatóvá válnak, ha a megfigyelési skálával megközelítjük a levágást. Az (8) és az (9) egyenletek jobb oldala közti különbség eltűnik ebben a határesetben és a futó csatolási állandó a csupasz értékhez tart, $e(\ell) \rightarrow e_B$. Hasonló gondolatmenettel bármely más paraméter skálafüggése is nyomon követhető és azt az általános tanulságot vonhatjuk le, hogy a csupasz paraméterek az általuk reprezentált fizikai mennyiségek levágás skáláján vett értékeit veszik fel.

Ez az eredmény döntő fontosságú, mert azt jelenti, hogy fizikai paraméterek skálafüggése a kvantumtérelmélet ultraibolya divergenciáinak kiküszöbölésére bevezetett renormalizációs eljárás egyik "melléktermékeként" kapható meg.

A levágástól függő paramétereket futó paramétereknek hívják arra utalva, hogy ezek a függvények írják le a paraméterek változását, miközben a megfigyelési skála fut az aszimptotikusan ultraibolya kezdeti értéktől a véges, fizikai értékig. Tehát a renormalizálható, aszimptotikusan szabad elméletek azok, amelyekben a futó csatolási állandó, a kölcsönhatás erőssége nullához tart kis távolságon, nagy impulzuson, illetve energián.

A II. fejezetben azt próbáltam érzékeltetni, hogy *minden* fizikai "állandó" valójában a megfigyelési skála függvénye, nem csak az elméletet rögzítő effektív csatolási állandók vagy tömegek. Például a Planck-állandó sem abszolút konstans, mert úgy jelenik meg a kvantumelméletben, hogy beolvaszthatóvá válik a csatolási állandókba. Meg kell különböztetni a csupasz és a renormalizált Planck-állandót és csupán az utóbbi, mely a hosszú távolsági határesetben a $\hbar(\infty) = 1,055 \times 10^{-27} \text{erg s} = \hbar$ értékhez tart, marad a kvantumeffektusok fontosságának mértéke.

IV. FUTÓ FÉNYSEBESSÉG?

A kvantummechanika mellett a speciális relativitáselmélet a másik alappillére a mai fizikának. Kozmológiai skáláktól a részecskefizikában feloldható legrövidebb távolságokig jóslataival megegyező eredményeket találunk. Azonban a kvantumfluktuációk birodalmában mintha problémák mutatkoznának¹⁵. Kezdjük vizsgálódásunkat azzal a kérdéssel, hogy a fénysebesség, amely egyike a legfontosabb fizikai állandóknak, valóban abszolút konstans, vagy találunk megfigyelési skálától való függést az értékében?

A fénysebesség c is beolvasztható az elmélet paramétereibe, azaz meg kell különböztetni a csupasz és a renormalizált értékét. Azonban a speciális relativitáselméletet kielégítő, Lorentz szimmetriával rendelkező modellekben a fénysebesség értéke a szimmetriatulajdonságok szintjén rögzítődik és a két érték azonos marad. Tehát c mégsem renormalizálódik? A helyzet tisztázása céljából ki kell lépni az eddigi formális tárgyalásból és vissza kell térni a klasszikus és a kvantumfizika határmezsgyéjére ahol két, az első pillanatban egymásnak ellentmondó következtetésre bukkanunk.

A speciális relativitáselmélet órák és méterrudak alkalmazásával fogalmazódik meg és a fénysebesség inerciarendszerfüggetlenségére alapul. Mindez nagy távolságon, a klasszikus tartományban megfogalmazható eljárás. A rövid távolságú relativisztikus kvantum tartományban azonban problémák jelennek meg. A relativisztikus kvantumtérelmélet szerint nem lehet egy m tömegű töltött, pontszerű elemi részecskét a $\lambda_C = \hbar/mc$ Compton hullámhossz nagyságrendjénél kisebb méretű tartományban lokalizálni. (Próbáljuk meg: legalább $p = \hbar/\lambda_C = mc$ impulzusú állapotokat kell használni, amelyek $E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = 2mc^2$ energiát tartalmaznak, elegendőt egy részecske-antirészecske pár keltéséhez. Ha pedig ez megtörténik, akkor már két azonos részecskét találunk, az eredetit és az épp most keltettet, aminek pedig a helyét nem ismerjük és az eredeti részecske koordinátáit szem elől tévesztettük.) Eszerint λ_C távolságon és λ_C/c időintervallumon belül nincs értelme a fénysebesség fogalmának.

Az eddigieknek ellentmondónak tűnő érv viszont az, hogy a formális Lorentz szimmetria ugyanúgy ellenőrizhető és kísérletileg alátámasztott mind a klasszikus, mind pedig a kvantum tartományban: az elektromágneses mező kvantumai, a fotonok c sebességgel terjednek bármilyen skálán.

A helyzet jobb megértése céljából képzeljük el egy O fizikai mennyiség, esetünkben a koordináta megmérését a kvantummechanikában. Jelöljük a részecske állapotát $|\psi\rangle$ -vel és az egyszerűség kedvéért diszkrét spektrumúnak feltételezett O hermitikus operátor sajátvektorait és sajátértékeit $|n\rangle$ -vel és λ_n -el. A részecske állapotát

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (11)$$

alakban felírva a c_n kifejtési együtthatók az O mennyiség mérésekor tapasztalható kvantumfluktációkat jellemzik, mert a Born-szabály szerint O méréskor $p_n = |c_n|^2 / \sum_m |c_m|^2$ valószínűséggel a λ_n eredményt találjuk. A mérés a (11) kifejezéssel megadott állapot kvantumfluktációjai közül egyet kiválaszt. Ha a teljes rendszer kvantumfluktációi kielégítik a speciális relativitáselmélet követelményeit, akkor ez az előre nem megjósolható eredménnyel járó mérésnek összhangban kell maradnia a Lorentz szimmetriával és az innen nyerhető fénysebesség c értékű marad.

El lehet-e dönteni, hogy a kvantumfluktációk külön-külön Lorentz szimmetrikusak-e vagy nem? Sajnos kísérletileg nem, mert a megfigyelhető mennyiségek a kvantumfluktációk átlagaként írhatók fel. De a perturbációszámítás képleteiben megjelenő, tömeghéjon kívüli közbenső állapotokra is történő összegzés és a pályaintegrál formalizmus azt sugallják, hogy a kvantumfluktációk nem Lorentz szimmetrikusak. Ezért úgy tűnik, hogy a fénysebesség csak a klasszikus tartományban igazi állandó.

Térjünk vissza a kvantum tartományba, ahol szét kell választanunk két problémát, a kis távolságon előforduló, relativisztikus effektusok által jelentett megszorításokat a kvantummechanikát jellemző, az interferencia által leírt kvantumfluktációk okozta lehetséges szimmetriasértéstől. Az előbbi esetben azt hiszem, hogy nincs értelme a fénysebességnek. Azonban gondosan izolált rendszerekben az interferencia, azaz a kvantum koherencia makroszkópikus távolságokon is fenntartható és ilyenkor lehetőség adódik a kvantumfluktációk által esetleg megváltoztatott fénysebességet kimérni. Ebből a szempontból nagyon fontos az Einstein-Podolski-Rosen típusú korrelációt mozgó detektorokkal ellenőrző kísérlet⁷, ahol egymástól 10km távolságban helyeztek el két detektort és egy korrelált foton-párokat kibocsájtó forrásból érkező párok koincidenációját mérték. Az egyikkel a (11) lineáris kombináció valamelyik járulékát választották ki, a másikkal pedig e kiválasztásról szóló információ érkezését figyelték. Nem találtak értékelhető, retardációra utaló késést a második detektorban, pontosabban a komponens kiválasztás információja legalább $10^7 \cdot c$ sebességgel terjed. Más források alapján is gyanakodhatunk egy, a kvantummechanikában rejlő nem-lokális jelenségre⁸.

A speciális relativitáselmélettel ellentmondó eredmény ez? A válasz az elmélet értelmezésétől függ. Ugyan a kvantum korreláció terjedése gyorsabban történik, mint a fénysebesség, azonban belátható, hogy használatával nem lehet információt továbbítani. Mihelyst a kvantum korreláció segítségével információt is kívánunk továbbítani, mint a kvantum teleportációs kísérletekben⁹, klasszikus csatornára is szükség van és a terjedés sebessége a speciális relativitáselmélettel összhangba kerül.

Tehát az a kérdés, hogy a speciális relativitáselméletben bármely jel terjedésének sebességéről van szó, vagy pedig csupán az információval bíró üzenetekről? A kérdés értelmetlen a klasszikus fizikában, ahol a valóság és a matematikai formalizmus békés harmóniában van és a válaszhoz a kvantummechanika értelmezési problémáinak a tisztázása szükséges.

V. KRITIKUS JELENSÉGEK

A renormalizáció kvantumtérelmélettel bevezetett eljárását nagy mértékben érthetőbbé és szemléletesebbé tette egy matematikailag ekvivalens, de fizikailag teljesen különböző, egyszerűbb alkalmazása a kritikus jelenségek körében^{10,11}. A renormalizáció kvantumtérelméleti és statisztikus fizikai megjelenésének megegyezése az elméleti fizika fejlődésének egyik fontos motorjává vált az utóbbi három évtizedben.

A. Probléma

A probléma, amely megoldásra várt a kritikus jelenségek, a másodrendű fázisátmenetek mikroszkópikus leírása volt. Tekintsünk egy tipikus másodrendű fázisátmenetet, a kritikus opaleszcenziát, amikor is egy alkalmasan választott kémiai összetételű folyadék T hőmérsékletét lassan változtatjuk. Mikor a hőmérséklet egy bizonyos $T = T_c$ érték közelébe ér, az addig átlátszó folyadék egyszerre csak zavarossá válik és elhomályosodik. A hőmérséklettel a $T \approx T_c$ pont körül pásztázva a kitisztulás-

elhomályosulás reverzibilis módon megismételhető. A jelenség magyarázata a $T = T_c$ hőmérsékleten kialakuló nagy távolságú korreláció a folyadék molekulái között. Ennek következtében a folyadékon áthaladó fény erősebben szóródik és a folyadék homályosnak tűnik.

Egy másik példa a ferromágnesesség kialakulása. Egyes fémek és ötvözetek erős mágnesezettséget fejlesztenek ki, amikor hőmérsékletük egy bizonyos, kémiai összetételtől függő T_c Curie-pont alá süllyed. Ez a mágnesezettség arra a kvantum jelenségre vezethető vissza, hogy a hőmérséklettel a Curie ponthoz közelítve egymástól egyre távolabb eső molekuláris mágneses momentumok válnak korrelálttá. Az eddig egymástól függetlenül, véletlen módon kialakult irány helyett most egymással párhuzamosan állnak be egy spontán módon kiválasztott irányban, ez pedig makroszkópikus méretű mágnesezettséghez vezet.

Hasznos bevezetni a korrelációs hossz fogalmát. Egy rendszer két alkotóeleme között értelmezhető a korreláció a koordinátájuk, impulzusuk, mágneses momentumainak irányai, vagy más jellemző mennyiségek között. Ez a korreláció a két alkotóelemek közti l távolság növelésekor csökken. Dimenzionális okokból a korreláció a dimenziótlan l/ξ mennyiségen keresztül függhet l -től. Az így megjelenő ξ hosszúság dimenziójú paramétert, ami a korreláció lecsengésének mértéke, korrelációs hosszknak nevezzük.

A közös eleme a másodrendű fázisátalakulásoknak az, hogy egy, τ -val jelölt rendszerparaméter $\tau = \tau_c$ értékére a korrelációs hossz divergál, $\lim_{\tau \rightarrow \tau_c} \xi(\tau) = \infty$. A fent említett példákban $\tau = (T - T_c)/T_c$, $\tau_c = 0$. A divergáló korrelációs hossz azt jelzi, hogy a rendszer érzékenyebben reagál külső zavarokra, hiszen ezeknek a hatása az alkotóelemek erősebb korrelációja miatt gyorsabban akkumulálódik. A rendszernek a gyenge külső zavarokra való reakcióerősségét, ami persze a külső, alkalmazott zavar és a figyelt reakció megválasztásától függ általában szuszceptibilitásnak hívják és χ -vel jelölik. A ferromágneses esetben ez a mágneses szuszceptibilitás, a gyenge külső mágneses tér által keltett mágnesezettség divergál, $\lim_{\tau \rightarrow \tau_c} \chi(\tau) = \infty$.

Miben áll a probléma? A hőmérséklet az anyag rendezetlen mozgásának mértéke és érthetetlennek tűnt, hogy ebben a változóban szinguláris függést találjunk, amikor a rendszer alkotóelemeinek viselkedésében minden folytonos módon függ az energiától. Ez eddig bármely fázisátmenet problémája, amely megoldásra vár. Ami ezen túl a másodrendű fázisátmenetek felé irányította a figyelmet, az az a jelenség volt, hogy ilyenkor további érthetetlen, de figyelemreméltóan egyszerű törvényszerűségekre bukkantak. Nevezetesen egymástól teljesen különböző anyagok ugyanolyan univerzális szingularitás struktúrát találtak a $\xi(\tau)$ vagy a $\chi(\tau)$ mennyiségekben. A probléma tehát nem csak az, hogy hogyan okozhat a hőmérséklet gyenge változtatása divergens korrelációs hosszak vagy reakcióerősségek gyenge külső zavarra, miközben minden mikroszkópikus tulajdonság folytonos módon függ a hőmérséklettől, hanem az is, hogy ezek a divergenciák miért ugyanolyan jellegűek különböző mikroszkópikus tulajdonságokkal bíró anyagok esetében? Vegyük itt észre az alrendszer-rendszer problémakör megjelenését a II. fejezetben tárgyalt egyszerű példákhoz hasonlóan.

A Fazekasban kezdődött...

B. Kvantumtérelmélet és statisztikus fizika

A probléma megoldásának első lépéseként a ferromágneses rendszer, vagy általában egy statisztikus fizikai rendszer leírásának matematikai formalizmusát kellene rögzíteni. Anélkül, hogy a részletekbe bonyolódnánk, elegendő lesz annyit tudni, hogy ez nagyon hasonló a kvantumtérelméletekhez. Ennek oka egy egyáltalán nem megértett hasonlóság a kvantummechanika és az egyensúlyi klasszikus statisztikus fizika között, nevezetesen az a tény, hogy az előbbiben a \hat{H} Hamilton operátor segítségével megalkotott $e^{-it\hat{H}/\hbar}$ operátor generálja az időfüggést és az utóbbiban a $e^{-H/k_B T}$ Boltzmann faktor adja a rendszer egy konfigurációjának a (nem normalizált) valószínűségét, ahol H a rendszer energiája, k_B a Boltzmann állandó és T az abszolút hőmérséklet.

A történet vége az, hogy a fontos, szembevetendő különbség a kvantumelmélet és az egyensúlyi statisztikus fizika között, a kvantum és a termikus fluktációk leírásában egy i faktor a pályaintegrál integrandus exponensében. A kvantumtérelmélet és az egyensúlyi statisztikus fizika kvalitatív megértése párhuzamos pályán halad.

Vegyük példaképp a levágás fogalmát, amelyet a tér-idő folytonossága miatt voltunk kénytelenek bevezetni a kvantumtérelméletben. Klasszikus statisztikus fizikában is hasonló problémára bukkanunk, ott a fekete test sugárzásának Jeans-féle szingularitása utal arra, hogy "túl sok" ultraibolya módusunk van. A kvantum statisztikus fizika pedig a kvantumtérelméletekkel teljesen megegyező ultraibolya divergenciákat mutat. A statisztikus fizikában is szükséges a regularizáció és a levágás bevezetése. Ez utóbbi véges, fizikai értéket vesz fel a töltött részecskék szilárd testekbeli leírásakor, ahol a minimális távolság a rácsállandóval azonosítható, $\ell_{\min} = a$. (Az elektromágneses kölcsönhatás leírásához a rácsállandótól független, sokkal rövidebb minimális hosszt kell bevezetni. De ez nem szükséges a szilárdtestfizikában általánosan érvényes nemrelativisztikus közelítés következtében, amikor az elektromágneses tér retardációja elhanyagolható.) Ezután nehézség nélkül átvihetjük a statisztikus fizikára a kvantumtérelméletben talált kapcsolatot a csupasz csatolási állandók és azok fizikai értékei, a futó csatolási állandók között.

Már ezen a szinten látható a kvantumtérelméletek renormalizációjának és a kritikus jelenségeknek a hasonlósága. A kvantumtérelméletben egy rögzített ℓ skálán érdeklődünk a dinamika iránt és a renormalizáció célja az, hogy a megfigyelt mennyiségek kifejezéseiben előforduló és a levágás eltávolítása közben felrobbanó ℓ/ℓ_{\min} hányadost a "szőnyeg alá söpörje". A kritikus jelenségekben pedig a minimális távolság, a rácsállandó, rögzített, véges értéket vesz fel, azonban a megfigyelt jelenségek jellemző hosszúságskálája, $\ell = \xi$ divergál az ℓ/ℓ_{\min} hányadossal együtt. A két jelenségkör közös eleme az elméletet definiáló ℓ_{\min} és a megfigyelés ℓ skálái között megnyíló nagy távolság. Mindkét kérdéskör problémáinak a közös forrása az, hogy miközben ez a két skála eltávolodik egymástól, egyre több szabadságfok járulékát kell figyelembe venni, miközben a megfigyelt jelenséget a levágás skálájától kiindulva összerakjuk¹⁶.

A IV. fejezetben láttuk, hogy egy részecskét nem lehet a λ_C Compton hullámhosszánál kisebb tartományban lokalizálni. Ez a Compton hossz ugyanakkor az elemi részecske által képviselt kölcsönhatás korrelációs hossza, mert segítségével távolítható el a hosszúság dimenzió az elméletből.

Tehát a $\xi \approx \lambda_C = \hbar/mc \rightarrow \infty$ kritikus jelenségek kvantumtérelméletben az $m \rightarrow 0$, eltűnő tömeg határesetének felelnek meg.

C. Blokkolás

Képzeljünk el egy a ráczállandójú szilárdtest rácsot, amely az $\mathbf{x} = a\mathbf{n}$ egész számokat tartalmazó vektorral jellemzett rácspontjában $\phi(\mathbf{n})$ klasszikus dinamikai változóval, szabadságfokkal rendelkezik. A rendszer dinamikáját a $H(\phi(\mathbf{n}))$ energiakifejezése által definiáljuk, mert a $\phi(\mathbf{n})$ konfiguráció relatív súlya $e^{-H(\phi(\mathbf{n}))/k_B T}$. A kritikus pontot megközeítve a korrelációs hossz divergálni kezd, egyre több szabadságfok esik egy ξ sugarú gömbbe és válik egymással erősen korrelálttá. Ez a kritikus ponttal kapcsolatos nehézségek forrása.

Ez a kép azt sugallja, hogy az egymástól rögzített, τ -független távolságban található szabadságfokok egyre erősebben válnak korrelálttá a $\tau \rightarrow \tau_0$ határesetben és ekkor egyszerűsíthetjük a rendszer leírását azzal, hogy ezeket az erősen korrelált szabadságfokokat összevonjuk. Ez a művelet a $\phi \rightarrow \tilde{\phi}$ ún. blokkváltozók bevezetését jelenti, melyek egy s lineáris faktorra hígított, $\tilde{a} = sa$ ráczállandójú rácshoz tartoznak. A $\tilde{\phi}$ blokkváltozók dinamikáját, a $\tilde{H}(\tilde{\phi})$ energia függvényt úgy határozzuk meg, hogy ez a blokkdinamika a blokkváltozók nyelvén kifejezhető mennyiségekre ugyanazt az eredményt szolgáltatassa, mint az eredeti, teljes rendszer. A hígított rácson kevesebb, fontosnak ítélt szabadságfok található és a számunkra valójában elegendő felbontással bíró $\tilde{H}(\tilde{\phi})$ dinamikáját jobb eséllyel érthetjük meg. Egy technikai részlet, hogy a $\tilde{H}(\tilde{\phi})$ energiakifejezésben a hosszúság egysége az eredetihez képest egy s faktorra meg lett nyújtva, azaz az új ráczállandó ugyanolyan számértékkel van képviselve, mint az eredeti rácson.

Ugyan a továbbiak szempontjából csak az a lényeges, hogy a $\tilde{H}(\tilde{\phi})$ kifejezés jól definiált, az előállításának egy fokkal részletesebb leírása a következő:

1. Alkossuk meg az s ráczállandó nagyságú kockákból, a blokkokból álló rácsot, melynek rácspontjai $\tilde{\mathbf{x}} = s\tilde{a}\tilde{\mathbf{n}}$ ($\tilde{\mathbf{n}}$ egész szám) koordinátájúak. Ezután a blokkokban található ϕ változók segítségével készítsük el a $\tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{n}}) = F(\phi, \tilde{\mathbf{n}})$ blokk szabadságfokokat. Az F függvény szabadon választható, a legegyszerűbb alternatíva a "többségi szabály",

$$\tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{n}}) = \frac{1}{s^3} \sum_{\mathbf{n} \in \tilde{\mathbf{n}}} \phi(\mathbf{n}), \quad (12)$$

ahol az összegzés a $\tilde{\mathbf{n}}$ koordinátájú blokkban lévő rácspontokra történik.

2. Integráljunk ki a blokkokban található kevésbé fontosnak ítélt szabadságfokokra a blokkváltozók rögzített értéke mellett,

$$e^{-\frac{1}{k_B T} \tilde{H}(\tilde{\phi})} = \left(\prod_{\mathbf{n}} \int d\phi(\mathbf{n}) \right)_{\tilde{\phi}} e^{-\frac{1}{k_B T} H(\phi)}. \quad (13)$$

(Ez a legnehezebb lépés, általában csak megközelítően végezhető el.)

3. Végezetül visszaállítjuk a rácsállandó numerikus értékét az $a \rightarrow a/s$ transzformáció végrehajtásával a $\tilde{H}(\tilde{\phi})$ kifejezésben. (Ez a lépés nem nagyon fontos, csupán a V D. fejezetben bevezetett fix-pontok és a III F. fejezetben megemlített anomális dimenziók azonosítását teszi egyszerűbbé.)

D. Renormalizációs csoport

A csatolási állandókat a dinamikát meghatározó $H(\phi)$ energia ϕ -függésének parametrizálásával vezetjük be. Például a gyakran használt

$$H(\phi) = a^3 \sum_{\mathbf{n}} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\phi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j) - \phi(\mathbf{n})}{a} \right)^2 + \sum_m g_m(a) \phi^m(\mathbf{n}) \right], \quad (14)$$

kifejezés, ahol \mathbf{e}_j a j -ik irányba mutató egységvektort jelöli, a $g_m(a)$ csatolási állandó családot vezet be. Célunk a csatolási állandók levágásfüggésének meghatározása.

Tegyük fel, hogy sikeresen végrehajtottuk az V C. fejezetben leírt blokkolást és azt találtuk, hogy ekkor a csatolási állandók a

$$\vec{g}(a) \rightarrow \vec{g}(sa) = \vec{B}_s(\vec{g}(a)) \quad (15)$$

egyenlet szerint transzformálódnak, ahol a \vec{g} vektor az adott $H(\phi)$ függvény által definiált összes csatolási állandót tartalmazza mint komponenst és $\vec{B}_s(\vec{g})$ egy komplikált, nemlineáris függvény. Egy s és egy s' faktoros blokkolás egymás utáni végrehajtásával nyilvánvalóan egy ss' faktoros blokkolást kapunk,

$$\vec{B}_{ss'}(\vec{g}(a)) = \vec{B}_{s'}(\vec{B}_s(\vec{g}(a))). \quad (16)$$

Ez az egyenlet a félcsoport struktúráját vezeti be, amely a nyújtási faktorok szorzásával ábrázolódik. Amennyiben a blokkolás invertálható, a félcsoport valódi csoporttá válik. A csatolási állandók terében fix-pontnak hívják azokat a \vec{g} pontokat melyek a blokkolás során nem változnak, $\vec{g}^* = \vec{B}_s(\vec{g}^*(a))$. A (16) egyenlet következtében a fix-pont független a definíciójában szereplő s nyújtási faktor megválasztásától.

A most bevezetett fix-pontok központi szerepet töltenek be a kritikus jelenségek tárgyalásában, mert a rendszer épp ezekben a pontokban skálainvariáns. Ezt a következőképp láthatjuk be. Mivel a blokkolt rendszer fizikai tulajdonságai megegyeznek az eredetivel a hosszúság egységének megfelelő átskálázásával, a blokkváltozók korrelációs hossza $\tilde{\xi} = \xi/s$. A fix-pontban

$$\xi^* = \frac{\xi^*}{s}, \quad (17)$$

mely egyenletnek megoldása $\xi^* = 0$ vagy $\xi^* = \infty$. A fix-pontot, ahol $\xi^* = 0$ infravörösnek, a $\xi^* = \infty$ esetben pedig ultrabolyának hívják. Világos, hogy a (17) egyenlet szükséges és elégséges feltétel ahhoz, hogy a rendszer invariáns legyen a hosszúságskála megnyújtásával szemben feltéve,

hogy nincsen más hosszúságskála a rendszerben. Ez utóbbi feltétel annak felel meg, hogy ne legyen más kölcsönhatás, hiszen minden kölcsönhatásnak van jellemző skálaparamétere. Ebben a kritikus jelenségekkel foglalkozó fejezetben csupán egyetlen kölcsönhatást tartalmazó elméletekre szorítkozunk. A kritikus pontok tehát az ultraibolya fix-pontoknak felelnek meg.

A renormalizációs csoport módszere azért rendkívül hatékony mert a csatolási állandók transzformációját leíró $\vec{B}_s(\vec{g})$ függvény analitikus a \vec{g} változóiban (kivéve az elsőrendű fázisátmeneteket). Ez abból következik, hogy egy blokkolás során véges sok szabadságfokot küszöbölünk ki, ami a (13) egyenletben egy véges dimenziójú parametrikus integrálhoz vezet. Az integrandus paraméter, azaz csatolási állandó függése analitikus marad, ha a csatolási állandók analitikus módon jelennek meg a $H(\phi)$ kifejezésben az eredeti, az összes szabadságfokot tartalmazó elméletben.

Az analicitás következményeképpen a csatolási állandók transzformációja linearizálható a fix-pontok körül. Rendkívül tanulságos a következő egyszerű stabilitási analízis. A $\vec{g} = \vec{g}^* + \delta\vec{g}$ parametrizálást használva és a

$$(\mathcal{B}_s)^{a,b} = \frac{\partial B_s^a(\vec{g})}{\partial g^b} \Big|_{\vec{g}=\vec{g}^*} \quad (18)$$

mátrixot bevezetve a lineárizált transzformációs szabály

$$\delta\vec{g} = \mathcal{B}_s \cdot \delta\vec{g} + \mathcal{O}(\vec{g}^2). \quad (19)$$

A renormalizáció csoport tulajdonsága a

$$\mathcal{B}_{s'} \cdot \mathcal{B}_s = \mathcal{B}_{ss'} \quad (20)$$

egyszerűbb alakot ölti a fix-pont körül. Legyen \vec{v}_α a \mathcal{B}_s mátrix jobboldali sajátvektora $\lambda_\alpha(s)$ sajátértékkel. A (20) egyenlet a

$$\lambda_\alpha(ss') = \lambda_\alpha(s)\lambda_\alpha(s') \quad (21)$$

feltételt jelenti a sajátértékekre, melynek az s változóban folytonos függést mutató $\lambda(s)$ függvények osztályában a megoldás

$$\lambda_\alpha(s) = s^{\nu_\alpha} \quad (22)$$

egyértelmű. A csatolási állandók \vec{v}_α kombinációját skálázó csatolási állandónak hívják, mely a kitevő ν_α alapján releváns ($\nu > 0$), marginális ($\nu = 0$) vagy pedig irreleváns ($\nu < 0$) lehet.

Ha a dinamika csak irreleváns paramétereket tartalmaz egy fix-pontban, akkor ez a pont stabil, mert a környezetéből indulva nagyszámú blokkolás után a fix-pontba érkezünk. Ha egy releváns paraméter előfordul, annak mentén a rendszer eltávolodik a fix-ponttól és előbb-utóbb kieriünk a linearizálhatóság tartományából, amelyet aszimptotikus skálázási tartománynak hívnak. Azt a mennyiséget, amelynek egy csatolási állandó a $H(\phi)$ energiakifejezésben az együtthatója, például $\phi^n \leftrightarrow g_n$ a (14) egyenletben, relevánsnak, stb. hívunk, ha a hozzátartozó csatolási állandó releváns, stb. A kvantumtérelméleti szóhasználatlál élve az energiakifejezésben előforduló tagokat operátoroknak fogjuk nevezni.

Alapvető fontosságú az a tény, hogy lokális $H(\phi)$ energiakifejezésekre szorítkozva az operátorok nagy része irrelevánsnak adódik és általában csak egy pár releváns vagy marginális operátort találunk egy-egy fix-pont stabilitási analízise során.

E. Univerzalitás, szingularitások és renormalizálható elméletek

Az imént bevezetett operátor osztályozás fontosságát azzal lehet meggyőzően bemutatni, hogy segítségével nem csak a fázisátmenetek által felvetett problémát válaszoljuk meg, hanem a kvantumtérelméletek renormalizálását is új, egyszerűbb módon érthetjük meg.

A rácsállandó levágásként értelmezhető és $H(\phi)$ az $\ell_{\min} = a$ levágással rendelkező rendszer dinamikáját határozza meg. Más szóval a (15) egyenletben előforduló csatolási állandók a III C. fejezetben bevezetett renormalizált trajektóriát követik és az a hosszúságskálához tartozó futó csatolási állandóként értelmezhetők. Más szóval az eredeti rendszer, amelynek legyen mikroszkópikus méretű rácsállandója, az $\ell \approx a$ rövid távolságon megfigyelhető dinamikát jellemző futó csatolási állandókat tartalmazza a $H(\phi)$ energiakifejezésében. Ha a hosszabb, makroszkópikus ℓ távolságon vizsgáljuk a rendszert, akkor $(\ln \ell - \ln a) / \ln s$ blokkolási lépést kell végrehajtanunk amíg a rácsállandó eléri a megfigyelési skálát és az így kapott csupasz csatolási állandók ezen a távolságon megfigyelhető dinamikát jellemzik. A tanulság az, hogy ha egy adott skálán érdeklődünk a dinamika felől akkor annyiszor blokkoljunk, míg a rácsállandó eléri a megfigyelési skálát. Itt megállva a végeredményképpen kapott $H(\phi)$ függvényből leolvashatjuk a minket érdeklő skálán megfigyelhető dinamika jellemző csatolási állandóit.

1. Kritikus jelenségek

Ennek a módszernek az első alkalmazásaként tekintsünk egy ultraibolya kritikus pont közeli rendszert. A kritikus pont egyúttal ultraibolya fix-pont is, tehát a blokkolás linearizált formája elfogadható. Kövessük a csatolási állandók fejlődését az egymás utáni blokkolások során a skálázó, \vec{v}_α bázisban. Az α bázisvektor együtthatója növekszik (vagy állandó) a releváns (vagy pedig marginális) esetben. Az irreleváns vektorok együtthatói pedig csökkennek. Tehát a makroszkópikus megfigyeléseket jellemző csatolási állandókat, amelyek nagy számú blokkolás után jelennek meg, a releváns vektorok dominálják és értékük független az irreleváns csatolási állandók kezdeti értékeitől. Ez a V A. fejezetben említett univerzalitás eredete.

A fázisátmeneteket jellemző szingularitások a megfigyelt mennyiségeket a mikroszkópikus paraméterek segítségével kifejező függvényekben jelentkeznek. Ezeket a függvényeket legegyszerűbben a blokkolás segítségével alkothatjuk a következő módon:

1. Előállítjuk a futó csatolási állandókat a megfigyelési skálán, mint a mikroszkópikus csatolási állandók függvényeit a blokkolás segítségével.
2. Kiszámoljuk a megfigyelt fizikai mennyiséget, mint a futó csatolási állandók függvényét.

3. Az első lépésben kapott függvényeket behelyettesítjük a második lépésben kapottba.

Mivel a 2. pontban említett fizikai mennyiség és futó csatolási állandók ugyanahhoz a skálához tartoznak, az itt kapott függvénykapcsolat egyszerű lesz. A szingularitások az 1. lépésben kerülnek be a képletekbe, mert "végtelenül sokszor" kell alkalmaznunk a külön-külön reguláris blokkolási transzformációt. A mikroszkópikus és a megfigyelési skála nagy távolságából ered a szingularitás.

Az elsőrendű fázisátmenetknél a korrelációs hossz általában véges marad és ez a gondolatmenet nem alkalmazható. Azonban a fázisátmenetet generáló instabilitások tanulmányozása azzal az eredménnyel zárul, hogy ezek csak akkor hatékonyak és képesek fázisátmenetet okozni, ha a rendszer végtelen sok nem-korrelált alrendszert tartalmaz. Ez azt jelenti, hogy a rendszer lineáris méretének és a korrelációs hosszának a hanyadosa divergál. Ez a szokatlan infravörös, hosszú távú dinamikára való érzékenység azt jelzi, hogy a rendszer lineáris méretéhez tartozó futó csatolási állandó fontos szerepet játszik a dinamikában és megint "végtelenül sokszor" kell alkalmazni az egyenként reguláris eredményt adó blokkolást.

2. Kvantumtérelmélet

A következő példában kövessük a rendszert visszafelé, a blokkolás inverzét hajtva végre feltéve, hogy létezik. A blokkolás során a rendszer minimális hosszparamétere egyre rövidebb lesz. Ez éppen az, amit a kvantumtérelméletekben szükséges renormalizáció során végrehajtunk. Mi a renormalizálhatóság feltétele? Az, hogy (i) az inverz létezzen, azaz a renormalizációs félcsoport csoport legyen és (ii) hogy ez a folyamat konvergáljon, a most bevezetett fogalmak alapján egy ultraibolya fix-ponthoz tartson. A (ii) feltétel akkor teljesül, ha minden csatolási állandó eltérése a fix-pontbeli értéktől egyre kisebbé válik az inverz blokkolás közben. Ez pedig azt jelenti, hogy ezek az eltérések egyre *nagyobbak* lesznek a szokásos blokkoláskor, azaz a csatolási állandók relevánsak lesznek. Az eredmény az elméletben előforduló operátorok két lehetséges osztályozásának átfedése: Tegyük fel, hogy elméletünkben kellően rövid a minimális távolság. Ekkor egy ultraibolya fix-pont közelében vagyunk. A fenti gondolatmenet pedig azt jelzi, hogy a releváns operátorok osztálya megegyezik a renormalizálható operátorokéval! Mivel "kevés" releváns vagy marginális operátor van egy ultraibolya fix-pont körül a renormalizálhatóság nagyon szigorú feltételt ró ki a lehetséges lokális kölcsönhatásokra.

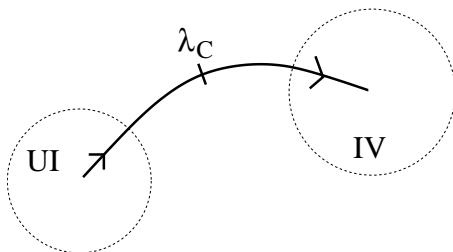
Az elmélet úgy veszti el a renormalizálhatóságát, hogy irreleváns operátor jelenik meg az energiakifejezésében, melynek csatolási állandója növekszik az inverz blokkolások, a levágás eltávolítása során. Ez az operátor kivezeti a rendszert a fix-pont környezetéből. A VI. fejezetben látni fogjuk, hogy persze a minimális hossz egy kisebb értékére a renormalizált trajektória megközelíthet egy másik fix-pontot. Ha annak a fix-pontnak megfelelő osztályozás szerinti irreleváns operátorok nem szerepelnek az energiakifejezésben, akkor az elmélet mégis csak renormalizálhatóvá vált, csak épp egy másik fix-pontnál, ami más rövid távolságú viselkedést jelent. Ez az a mechanizmus, amely lehetővé teszi, hogy az eddig egyetlen fix-pont körüli vizsgálatnak a csatolási állandók terében

globális általánosításával több kölcsönhatást tartalmazó, realisabb elméleteket is tárgyalhassunk.

VI. GLOBÁLIS RENORMALIZÁCIÓS CSOPORT

Az eddig elmondottak alapján a renormalizációs csoport módszere egy fix-pont környékén tűnik hatékonynak. A fix-pont viszont kritikus viselkedésnek és renormalizálható elméletnek felel meg. Ez utóbbi szigorú megszorítást jelent, az elmélet a rövid távolságú dinamikája tetszőlegesen kis távolságokon is érvényben kell, hogy maradjon. Ezzel a feltétellel kizártuk a realiztikusabb eseteket, amikor több, különböző távolságon ható kölcsönhatás van egyidejűleg jelen. Természetesen lebonthatjuk a problémát az egyes kölcsönhatások egyenkénti vizsgálatára és minden kölcsönhatásra meghatározhatjuk a mikroszkópikus releváns paramétereket. De ezek nyilván nem függetlenek egymástól. Azt reméljük, hogy a fizika törvényei lokálisak a tér-időben, azaz a rövidebb távolságon uralkodó törvény szabja meg hosszabb távolságon megfigyelt jelenségeket. De akkor mik a "valódi", független paraméterei ennek az összetettebb helyzetnek¹²?

A válasz V D. fejezetben körvonalazott stabilitási analízisnek globális általánosításából fakad, amikor a csatolási állandók terében egy fix-pont helyett egyszerre több fix-pont környéki viselkedést követünk nyomon. Kezdjük a legegyszerűbb estettel, amikor a renormalizált trajektória két fix-pont környezetében halad el egymás után és csak ez után nézzünk szembe a több kölcsönhatás jelenétéből fakadó tartalmazó komplikációkkal.



3. ábra. Minden kvantumtérelméleti modell két fix-pont között interpolál. A renormalizált trajektória az ultraibolya (UI) fix-pont környezetéből, az aszimptotikus ultraibolya skálatartományból az egymásutáni blokkolás következtében a nyíl irányában halad és elér az aszimptotikus infravörös (IV) skálatartományba. A skálatörvények akkor változnak meg amikor a futó levágás eléri az elméletben található részecske λ_C Compton hullámhosszát, hiszen akkor válik a részecske lokalizálhatóvá.

A Fazekasban kezdődött...

A. Renormalizációs csoport mikroszkóp

Tekintsünk egy modellt, melynek renormalizált trajektóriáját két skálatartományban követjük nyomon, egy ultraibolya és egy infravöröben, ahogy ezt a 3.ábra mutatja sematikusan. A komplikációk abból fakadnak, hogy ugyanazt az operátorcsaládot a két fix-pont körül két különböző skálatartományban osztályozzuk és egyes operátorok különböző viselkedést mutathatnak. Célunk a $g(\ell_{IV})$ hosszú távolságú, infravörös fizikai mennyiségeknek, futó csatolási állandóknak a csatolási állandók $g(\ell_{UI})$ mikroszkópikus, rövid távolságon vett kezdőértékeire való érzékenységeknek, $\partial g(\ell_{IV})/\partial g(\ell_{UI})$ meghatározása.

A skálázó operátorok szempontjából a 4. ábrán látható négy tipikus esetet különböztethetünk meg, melyek közül három triviális. Az (a): UI releváns-IV releváns, (b): UI releváns-IV irreleváns esetekben az érzékenység természetes módon megmarad. A (c): UI irreleváns-IV irreleváns típusú csatolási állandók kiesnek a hosszútávolságú fizikából. Az ultraibolya fix-pontból származó univerzitás továbbra is megmarad ezekben az esetekben.

Azonban a (d): UI irreleváns-IV releváns eset problematikus. Továbbra is igaz marad, hogy amíg a renormalizált trajektória az ultraibolya skálatartományban van, addig a $g(\ell_{UI})$ -ra való érzékenység csökken a megfigyelési hosszúságskála növelésével. A helyzet jobb megértése céljából vezessünk be egy $\bar{\ell} \approx \lambda_C$ skálát a két skálatartomány között és tegyük fel, hogy a skálatörvények a

$$\begin{aligned} g(\ell_{UI}) &= C_{UI} \left(\frac{\ell_{UI}}{\bar{\ell}} \right)^{-\nu_{UI}} g(\bar{\ell}), \\ g(\ell_{IV}) &= C_{IV} \left(\frac{\ell_{IV}}{\bar{\ell}} \right)^{\nu_{IV}} g(\bar{\ell}) \end{aligned} \quad (23)$$

alakúak, ahol $\nu_{UI}, \nu_{IV} > 0$ és C_{UI}, C_{IV} egységnyi nagyságrendű együtthatók. Ekkor

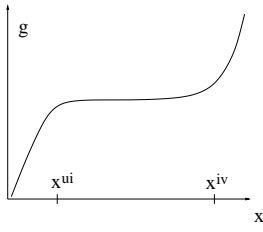
$$g(\ell_{IV}) = \frac{C_{IV}}{C_{UI}} \left(\frac{\ell_{IV}}{\bar{\ell}} \right)^{\nu_{IV}} \left(\frac{\ell_{UI}}{\bar{\ell}} \right)^{\nu_{UI}} g(\ell_{UI}). \quad (24)$$

Az infravörös skálatartomány hosszának

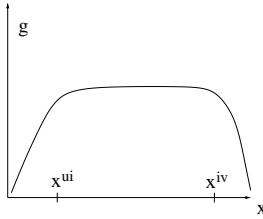
$$\left(\frac{\ell_{IV}}{\bar{\ell}} \right) = \left(\frac{\ell_{UI}}{\bar{\ell}} \right)^{-\frac{\nu_{UI}}{\nu_{IV}}} \quad (25)$$

módon való megválasztásakor az érzékenység ultraibolya tartományban elszenvedett elnyomása kompenzálódik az infravörös skálatartományban és az infravörös fizika érzékennyé válik a mikroszkópikus csatolási állandó megválasztására. Az infravörös fix-pont módosítja az elmélet univerzalitási osztályát és az ultraibolya skálatörvények univerzalitási osztályához képest egy új mikroszkópikus paramétert generál. A (25) egyenlet teljesítése esetén a rendszer felnagyítja a felbontóképességét a mikroszkópikus paramétereire.

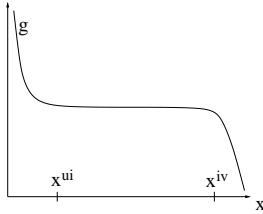
Ennek a mechanizmusnak és a szokásos mikroszkóp elvének a hasonlósága szembeötlő. Míg a mikroszkóp a fénynyaláboknak a szokásos háromdimenziós térben való fókuszálására és divergenciájára alapszik, addig a renormalizált trajektória a csatolási állandók terében van a fókuszáló és divergáló hatásoknak alávetve.



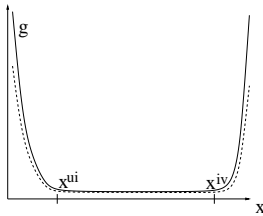
(a)



(b)



(c)



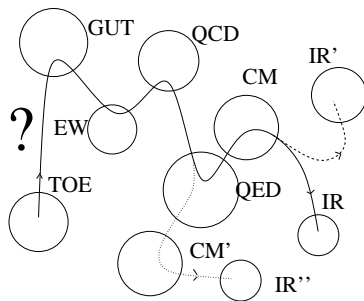
(d)

4. ábra. Két különböző skálatartománnyal rendelkező elméletben egy skálázó operátor négyféle viselkedést mutathat. (a): UI releváns, IV releváns, (b): UI releváns, VI irreleváns, (c): UI irreleváns, IV irreleváns és (d): UI irreleváns, IV releváns. Az ábrák a hozzátartozó csatolási állandó tipikus viselkedését mutatják a megfigyelési hossz függvényében. Az aszimtotikus ultraibolya skálatartomány felső vége x^{ui} és az aszimtotikus infravörös skálatartomány eleje x^{iv} . A renormalizációs csoport mikroszkóp effektus annak az esetnek felel meg, amikor a (d) ábrán szaggatott vonallal jelzett renormalizált trajektória infravörös viselkedésének változásából visszakövetkeztethetünk a megváltozott kezdeti feltételre.

Ismerünk-e példát erre a jelenségre? A kvantumtérelméleti modellek kellően alapos megoldása, amely ezt a mechanizmust fel tudná ismerni, egyelőre csak a legegyszerűbb, egydimenziós modellekben érhető el, de már ebben az esetben is megvalósítható a renormalizációs csoport mikroszkóp¹³. Két másik reális eset is ismeretes, az egyik a szupravezetésre, a másik pedig a kvarkbezárás jelenségére alapul. Eddig azonban az elmélet bonyolultsága mindkét esetben megátolta a részletes analízis végrehajtását.

B. A Mindenség Elmélete

Tekintsük végezetül a több mint két fix-pontot tartalmazó elméletek komplikáltabb esetét. Mi több, próbáljuk elképzelni a legkomplikáltabb esetet, a Mindenség Elméletét¹⁴. Naivitás lenne akármilyen konkrét elméletet javasolni, a probléma az erőnkön és a lehetőségeinket messze túlmutat. Azonban ez nem jelenti azt, hogy semmit se mondhatnánk. Képzeljük el az elmélet renormalizált trajektóriáját. Milyen térben? Egy alterét már ismerjük ennek a térnek, amelynek koordináta tengelyeit az összes elképzelhető fizikai "állandó" alkotja, amely valaha is előfordult vagy elő fog fordulni a fizikusok, vegyészek vagy mérnökök munkájában. Az 5. ábra a renormalizált trajektóriát kívánja reprezentálni ebben a még mindig elég nagy és homályosan definiált térben.



5. ábra. A Mindenség Elméletének renormalizált trajektóriája.

Ami biztos, hogy a trajekóriának van eleje (akár $l_{min} = 0$, akár $l_{min} > 0$) és vége (az Univerzum is véges). A trajektóriát a TOE (Theory Of Everything) ultraibolya fix-pont környezetéből a számunkra ismeretlen releváns operátorok vezetik ki. Ezután a trajektória hosszú bolyongásba kezd, melynek során különböző fix-pontok közelében halad el. Amikor egy fix-pontot megközelít és annak linearizálhatósági tartományában tartózkodik, akkor ahhoz a fix-ponthoz tartozó effektív elmélet jó közelítéssel írja le az idetartozó skálájú fizikát.

Az ultraibolya fix-pont környezetének elhagyása után további ismeretlen tartományok következnek. A részecskefizikában jelenleg általánosan elfogadott elképezelés szerint a gravitáció leválk klasszikus kölcsönhatás formájában a többi, továbbra is kvantum szinten megjelenő kölcsönhatásról amikor a trajektória eléri a Planck-skálát $l \approx l_{\text{Planck}} = 1,6 \times 10^{-33} \text{cm}$. A megfigyelési skálának további növelése után, az $l \approx l_{\text{GUT}} = 10^{-29} \text{cm}$ környezetében a Nagy Egyesített Modell skálatartományába érünk, ahol az erős, gyenge és elektromágneses kölcsönhatások egyesítve, azaz

egymással ekvivalens, szimmetrikus módon jellenek meg. Ezután, körülbelül $\ell \approx 10^{-19}$ cm-nél érünk be a Sztandard Modell skálatartományába, ahol először az erős kölcsönhatás leválik a továbbra is egyesítve megjelenő elektro-gyenge kölcsönhatásról. Ez utóbbit a Weinberg-Salam modell írja le és a hozzátartozó fix-pont $\ell \approx 10^{-16}$ cm-nél EW-vel (electro-weak) van jelölve az 5. ábrán. Ennél hosszabb távolságokon csupán az elektromos és a mágneses kölcsönhatás marad egyesítve és $\ell \approx 10^{-15}$ cm körül beérünk az erős kölcsönhatás, a kvantumszíndinamika QCD (Quantum Chromodynamics) fix-pontjának a vonzaskörébe. A magfizikai jelenségeket magunk mögött hagyjuk $\ell \approx 10^{-12}$ cm körül és innen kezdve a kvantumelektrodinamika QED (Quantum Electrodynamics) fix-pontja írja elő a skálafüggést. Ezt használtuk a III C. fejezetben a renormalizáció bemutatására példaként.

Innen kezdve a helyzet elbonyolódik, mert abba a skálatartományba értünk, ahol már befolyásolni tudjuk a környezetet. Az atomfizika $\ell \approx 10^{-8}$ cm távolságskáláján az anyag kémiai összetétele függvényében különböző környezetet (vegyületet) teremthetünk, egymástól eltérő effektív paraméterekkel. Ezt a lehetőséget szemlélteti a pontozott vonalú folytatása a trajektóriának. A folytonos és a pontozott vonallal jelzett trajektória két különböző kémiai környezetben halad tovább. A szilárdtestfizika korrelációs hossz kálájánál, $\ell \approx 10^{-6}$ cm nagyságrendjében további fix-pontokat találunk, melyek a jól ismert kritikus jelenségekhez tartoznak és a CM-mel (Condensed Matter) vannak jelölve. Ebben a tartományban is elágazhat a trajektória hiszen különböző összetételű szilárd testek dinamikája más és más effektív paraméterekkel jellemezhető. Egy ilyen bifurkáció történik az ábrán, amikor a folytonos vonallal jelzett trajektóriáról leválik egy szaggatott vonallal jelzett, egy másik szilárd testhez tartozó trajektória.

Hozzávetőlegesen $\ell \approx 10^{-4}$ cm-nél, az atom és a szilárdtestfizika skáláit pár nagyságrenddel elhagyva egy alapvető változás történik, a klasszikus fizika tartományába értünk. Természetesen makroszkópis kvantum effektusok előfordulhatnak, mint például ferromágnesesség vagy szupra-vezetés, ilyenkor a klasszikus fizika nagyobb távolságnál jelenik csak meg. Ettől a dekoherencia skálától kezdve klasszikus elektromágneses és gravitációs kölcsönhatás kíséri minket. A klasszikus tartományban is lehetnek fix-pontok, klasszikus kritikus jelenségekhez tartoznak. Végezetül a trajektória befut az utolsó, IR infravörös fix-pont tartományába, amelyet valószínűleg asztrofizikai módszerekkel fogunk majd megismerni.

Minden egyes fix-pont behozza a saját releváns paramétereit mint fontos fizikai "állandókat" az adott skálatartományban. Ez azt jelenti, hogy abban a skálatartományban észlelt fizikai jelenségek legegyszerűbben ezekkel a mennyiségekkel parametrizálhatók. Ezeken a skálatartományokon mint szigeteken egyszerűbb effektív elméletek működnek a skálatartományukban elvégzett mérések által rögzítendő paraméterekkel. Két ilyen aszimptotikus skálatartomány között a fizika elkomplikálódik, mert két kölcsönhatás egymással versengve próbálja befolyásolni a dinamikát.

Az 5. ábra számos fix-pontjai között azért van egy, amelyik fontosabb szerepet játszik a többinél. Ez az első, amely az ultraibolya aszimptotikus skálázásért felelős. Azért, mert a Min- denség Elméletének renormalizálható paramétereiből, a renormalizált trajektória kezdőfeltételéből minden fizikai paraméter megkapható. Mivel aránylag kevés renormalizálható csatolási állandó

van, ez egy gazdaságos, egyszerű jellemzése az egész trajektóriának. Ez a Nagyenergiájú Fizika nagyvonalú, redukciós stratégiája.

Miért nem mondható el ugyanez a többi fix-pontról, hiszen ott is csupán néhány renormalizálható csatolási állandónk van? A probléma onnan ered, hogy ugyan matematikailag bárhol azonosíthatnánk a trajektóriát a futó csatolási állandók ott felvett értékei segítségével, azonban egy hosszabb távolsághoz tartozó jelenségkörből nagy numerikus nehézségek árán lehet csak a rövidebb távolságok fizikáját azonosítani. Például szilárdtestfizikai mérésekből nehezen lehet a Sztandard Modell paramétereit megbecsülni, mert a mikroszkópikus paramétereiktől rendkívül komplikált módon függenek a makroszkópikus mennyiségek. A Sztandard Modell renormalizálható paramétereinek egy kicsiny változtatása egy bifurkációt okozhat és más fix-pontok felé küldheti a trajektóriát. Pragmatikusan egyszerűen arra a tényre is hivatkozhatunk, hogy egy nagyenergiájú részecskefizikai paraméter mint például egy nehéz részecske tömegének meghatározása nagyon bonyolult és igényes munka, esetenként fizikusok százait és évek sorát igényli. Épp ez a rendkívüli erőfeszítés a bizonyítéka, hogy a nagyenergiás fizika kérdéses paramétere nem játszik fontos szerepet alacsony energiákon.

A helyzet hasonlít a klasszikus mechanikából ismert káoszra. Valószínűleg a blokkolás \mathcal{B} transzformációja kaotikus leképezést valósít meg és a trajektória kezdeti értéktől való függése gyorsan elkomplikálódik, amint egy új fix-pont közelébe érünk. A redukciós módszer nem hatékony. Ennél sokkal célravezetőbb minden egyes effektív elméletet a saját skálatartományában rögzíteni, mert akkor az előforduló függvények egyszerűbbek. Az elvi problémát, a megfigyelt mennyiségeket a mikroszkópikus paramétereiből való levezetést egyelőre el kell halasztanunk amíg hatékonyabb matematikai és pontosabb kísérleti módszerek állnak a rendelkezésünkre és be kell érünk az effektív elméletek skálatartományukban történő "lokális" használatával vagy legfeljebb a szomszédos fix-pontból való levezetésével.

VII. HOL IS TARTUNK?

A renormalizációs csoport fogalmát és alkalmazásának egy pár tanulságát próbáltam az előző fejezetekben bemutatni. A részecskefizikától a statisztikus fizikáig terjed az alkalmazások köre azt hangsúlyozandóan, hogy a renormalizációs csoport két szinten tárgyalható. Az első szinten egy adott jelenségkörön belül technikai (ultraibolya divergenciák kiküszöbölése a kvantumtérelméletben) vagy fogalmi (kritikus jelenségek szingularitásainak és univerzalitásának eredete) problémák tisztázását várjuk a módszertől.

De van egy második szint is. Különböző skálán bevezetett részrendszerek együttesét lehet módszeresen tanulmányozni ezzel a módszerrel. Remélem, hogy egyszer kvantitatív szinten is megértjük majd, ahogy a fizika mikroszkópikus törvényszerűségeiből származik a makroszkópikus fizika. Ennek a láncnak számos eleme már ismert, azonban a nagyobb ugrások, ahol a két oldalon más szabadságfokok állnak, egyelőre a homályban vannak. Elegendő a kvarkbezárás, az Anderson lokalizációt, a gravitonok hiányát és a legnagyobb kihívást, a kvantum-klasszikus átmenetet

említeni, mint nehéz, hírhedt problémákat. A renormalizációs csoport ilyen jellegű alkalmazása az "elméletek elméletéhez", meta-elméletéhez vezet.

Manapság a fizika nehéz helyzetben van, mert egyre nehezebb a szokásos módon, az energia növelésével finomítani tovább az elemi részecskék világának feltérképezésére irányuló kísérletek felbontóképességét. A Minenség Elmélete renormalizált trajektóriájának kaotikus viselkedése is ennek a stratégiának a nehézségeire hívja fel a figyelmünket. A renormalizációs csoport globális alkalmazása ugyanakkor egy alternatív stratégiát sugall. Az aszimptotikus paraméterek egyre pontosabb megismerése helyett a univerzalitás szigetek közti kapcsolatot kellene tisztázni mert ez egy hatékonyabb és ennek megfelelően könnyebben megvalósítható módon vezethet el a fizika egységének felismeréséhez.

A renormalizációs csoport a fizikán kívül is alkalmazható szinte bármely komplex, részekből álló és matematikai formalizmust követő rendszerre. Példákepp a forgalomszabályozás, a biológia, a pénzügyi folyamatok és a szociológia említhetők.

Mennyiben sikerült választ adni a bevezetőben felvetett rész-egész problémára? A fizikát illetően a következő mondható el: A fizikai "állandók" skálafüggése annak a jele, hogy egy részrendszer viselkedése nem vizsgálható elszigeteltségben, de ez a probléma módszeresen tárgyalható. A renormalizációs mikroszkóp jelensége azt tanúsítja, hogy a teljes rendszer több, mint alkotóelemeinek az összege, hiszen az effektus nem létezik a mikroszkópikus szinten, csupán az összes alrendszer összehangolt együttműködése által.

-
- ¹ A renormalizáció első általános tárgyalása a N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience, 1959 könyvben található, amely a J. Bjorken, S. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, 1965 könyvvel együtt az elkövetkezendő mintegy két évtizedre általánosan elfogadott hivatkozási alappá vált. Az első két, pályaintegrál formalizmusára alapuló, átekinthetőbb kézikönyv a pedagógiailag jól sikerült C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980 és P. Ramond, *Field Theory: A modern Primer*, Benjamin, 1980. Azóta megjelent számos további könyv hasonló, némileg frissített tartalommal és szinte mindegyik jó bevezetést nyújt. A J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge Univ. Press, 1984 részletesen és könnyen követhető mutatja be a perturbatív renormalizációt.
 - ² Jó áttekintést ad L. S. Schulmann, *Techniques and Applications of Path Integration*, Wiley, 1981.
 - ³ J. Polonyi, *Ann. Phys.* 252, 300 (1996).
 - ⁴ M. Gockeler, R. Horsley, V. Linke, P. Rakow, G. Schierholz, H. Stuben, *Phys. Rev. Lett.* 80, 4119 (1998).
 - ⁵ S. Coleman and D. J. Gross, *Phys. Rev. Lett.* 31, 851 (1973).
 - ⁶ J. B. Bell, R. Jackiw, *Nouvo Cimento* 60A, 47 (1969); S. Adler, *Phys. Rev.* 177, 2426 (1969); K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* 42, 1195 (1979)
 - ⁷ H. Zbinden, J. Brendel, N. Gisin, W. Tittel, *Phys. Rev.* A63, 022111 (2001).
 - ⁸ J. Bell, *Physics* 1, 195 (1964).
 - ⁹ C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* 70, 1895 (1993); T. Jennewein, G. Weihs, J. W. Pan, A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* 88, 017903 (2002).
 - ¹⁰ Az első összefoglalás K. G. Wilson, J. B. Kogut, *Phys. Rep.* 12C, 77 (1974). Két későbbi jól felépített

bevezető a témába R. J. Crewick, H. A. Farach, C. P. Poole, Jr. *Introduction to Renormalization Group Methods in Physics*, John Wiley & Sons, 1992 és J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*, Cambridge Univ. Press, 1996.

- ¹¹ A kvantumtérelméleti renormalizáció és a kritikus jelenségek kapcsolatának első összegzése D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, World Sc. 1984. Meggyőző teljességgel írt kézikönyv ebben a témában J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, III. Ed. Clarendon Press, 2001
- ¹² J. Alexandre, V. Branchina, J. Polonyi, Phys. Rev. D 58, 16002 (1998).
- ¹³ Nagy Sándor, Nándori István, Polónyi János, Sailer Kornél, előkészületben lévő kézirat.
- ¹⁴ J. Polonyi, hep-th/110026, Central European J. of Physics 1, 1 (2002).
- ¹⁵ Ez a fejezet, melynek a megértéséhez a kvantummechanika alapjainak ismerete szükséges független a többitől.
- ¹⁶ Ez a gondolat ugyanaz, mint a csupasz és a futó csatolási állandó megegyezéséhez vezető, a (9) egyenlet utáni bekezdésben említett, kulcsfontosságú megjegyzés.



A Fazekásban kezdődött...